N° d'ordre : 448

Année 1971

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE

en vue de l'obtention

DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Lucas PUN

Licencié ès Sciences
Ingénieur E. S. E.
Ingénieur - Docteur

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES SOLUTIONS DES RECURRENCES NON LINÉAIRES EXEMPLES D'APPLICATION A DIFFERENTS DOMAINES DE L'AUTOMATIQUE

Soutenue le 30 Juin 1971 devant la Commission d'examen

MM. J. LAGASSE — *Président*

Y. SEVELY
C. MIRA
I. GUMOWSKI
P. VIDAL — *Examinateurs*

N° d'ordre : 448 Année 1971

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE

en vue de l'obtention

DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Lucas PUN

Licencié ès Sciences
Ingénieur E. S. E.
Ingénieur - Docteur

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES SOLUTIONS DES RECURRENCES NON LINÉAIRES EXEMPLES D'APPLICATION A DIFFERENTS DOMAINES DE L'AUTOMATIQUE

Soutenue le 30 Juin 1971 devant la Commission d'examen

MM. J. LAGASSE — *Président*
Y. SEVELY
C. MIRA
I. GUMOWSKI — *Examinateurs*
P. VIDAL

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE PAUL SABATIER TOULOUSE

DIRECTION DE L'UNIVERSITE

M. LARENG	Président
M. MATHIS	Premier Vice-Président
M. MARTIN	Deuxième Vice-Président

HONORARIAT

M. BLAIZOT	Doyen honoraire
M. CAPDECOMME	Doyen honoraire, Recteur honoraire
M. DELTHEIL	Doyen honoraire, Recteur honoraire, Professeur honoraire
M. DUPOUY	Membre de l'Institut, Doyen honoraire, Directeur Général honoraire du C.N.R.S., Professeur honoraire.
M. DURAND	Doyen honoraire
M. FOUCHE	Professeur honoraire
M. GAUSSENS	Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut
M. JACQUES	Professeur honoraire
M. MIGNONAC	Professeur honoraire
M. MORQUER	Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut
M. SECONDAT	Professeur honoraire
M. TEISSIE-SOLIER	Professeur honoraire
M. VANDEL	Professeur honoraire, Membre de l'Institut

PROFESSEURS

M. ESCANDE	Mecanique des Fluides, Membre de l'Institut
M. CASTERAS	Géologie, Correspondant de l'Institut
M. BEDOS	Chimie
M. CAPDECOMME	Minéralogie
M. DUPIN	Radioélectricité
M. NOUVEL	Biologie Générale
M. GALLAIS	Chimie, Correspondant de l'Institut
M. DURAND	Physique
M. FERT	Physique
M. DIEHL	Agronomie
M. LESBRE	Chimie Organique
M. BRUNEL	Physiologie Végétale.

M. HURON	Mathématiques Appliquées
M. MARGULIS	Pédologie
M. TRICHE	Chimie Analytique et Spectrographie
M. LEDOUX	Zoologie Appliquée
M. RIVALS	Agriculture
M. PERRIER	Physique
M. MATHIS	Chimie
M. ORLIAC	Géochimie et Minéralogie
M. LAFOURCADE	Physique
M. ANGELIER	Zoologie
Mlle DE FERRE	Botanique
M. FARRAN	Minéralogie et Géotechnique
M. LAUDET	Physique Théorique et Calcul Numérique
M. SERFATY	Biologie Animale
M. NOUGARO	Hydraulique Générale et Appliquée
M. LAGASSE	Electrotechnique
M. GARDY	Génie Chimique
M. BLANC	Physique Nucléaire
M. BIREBENT	Electronique Appliquée
M. VOIGT	Chimie Minérale
M. LEREDDE	Botanique
M. LELUBRE	Géologie
M. TROCHAIN	Botanique
M. MASDUPUY	Chimie
M. LALAGUE	Mathématiques Générales
M. DESSENS	Physique du Globe, Correspondant de l'Institut
M. BOUIGUE	Astronomie
M. COUCHET	Physique
M. LEJEUNE	Chimie
M. LASCOMBES	Botanique
M. ASSELINEAU	Chimie Biologique
M. MAURET	Chimie Systèmatique
M. AGID	Physiologie
M. MONTANT	Cryptogamie
M. GAUTIER	Physique
M. CRUMEYROLLE	Mathématiques
M. GOURINARD	Géologie
M. PULOU	Minéralogie
M. CAMBOU	Physique Spatiale
M. MIQUEL	Chimie
M. LACOSTE	Electrotechnique
M. THIBAULT	Mécanique Rationnelle et Appliquée
M. MONTEL	Chimie Physique et Electrochimie
M. MASCART	Mathématiques
M. MEDIONI	Psychophysiologie
M. THIRRIOT	Hydrodynamique E.N.S.E.I.H.T.
M. BRENON	Géologie
M. LAFFON	Calcul Différentiel et Intégral
M. RAYNAUD	Physiologie Animale

M. ZANTA	Chimie Biologique
M. SEVELY	Electrotechnique
M. POMMIEZ	Mathématiques
M. REY	Biologie Végétale
M. COULOMB	Physique
M. TRINQUIER	Physique
M. MARONI	Chimie
M. BEETSCHEN	Biologie Générale
M. GRUAT	Mécanique des Fluides (Hydraulique)
M. DERACHE	Physiologie Animale

PROFESSEURS ASSOCIES

M. MANSOUR
M. SAKUMA

PROFESSFURS SANS CHAIRE

M. HAMANT	Botanique
Mme BRUNEL	Physiologie Végétale
Mlle BERDUCOU	Physiologie Végétale
M. PICCA	Physique
M. MERIC	Mathématiques Appliquées
Mme LECAL	Zoologie
M. BUGAREL	Génie Chimique
M. MIROUSE	Géologie
M. PILOD	Physique
M. LARROQUE	Physique
M. BARRANS	Chimie
Mme LAFFON	Mathématiques
Mlle LAPEYRE	Mathématiques (Informatique)
M. DAT	Mécanique des Fluides
M. JEANNIN	Chimie Minérale
M. BERTRAND	Chimie
M. SATGE	Chimie Organique
M. DESQ	Mathématiques
M. MAHENC	Chimie
M. LATTES	Chimie
M. ROCARD	Electronique
M. DEGEILH	Physique
M. FALLOT	Biologie Végétale (Viticulture et Arboriculture)
M. POILBLANC	Chimie
M. TOUZE	Physiologie Végétale
M. FRASNAY	Mathématiques
M. CASSAGNAU	Zoologie
M. GUERIN	Mathématiques

MAITRES DE CONFERENCES

M. BLANCHARD	Mathématiques
M. HOFFMANN	Electronique
M. BITSCH	Zoologie
M. FONTAN	Physique Nucléaire
M. PESCIA	Physique
M. SICARD	Biologie Génétique
M. CAUSSINUS	Mathématiques Appliquées
M. DE LOTH	Chimie Physique
M. MARTY	Physique Industrielle
M. BAUDRAS	Chimie Biologique
M. DURAND Ph.	Physique
M. LEFEUVRE	Electronique E.N.S.E.E.I.H.T.
M. SOUQUET	Géologie.
M. SAPORTE	Physique
M. ATTEIA	Mathématiques
M. ENJALBERT	Chimie
M. IMBERT	Psychophysiologie
M. SCHNEIDER	Biologie Cellulaire
M. ANGELINO	Génie Chimique
M. DABOSI	E.N.S.C.
M. ETTINGER	Mathématiques
M. CALVET	Mécanique des Fluides E.N.S.E.E.I.H.T.
M. PAGANI	Physique
M. CUPPENS	Mathématiques
M. MATHIEU	Chimie Analytique
M. TRANNOY	Physique E.N.S.E.E.I.H.T.
M. CASTAGNETTO	Mathématiques E.N.S.E.E.I.H.T.
M. GILOT	Génie Chimique (Institut du Génie Chimique)
M. LANTELME	Chimie Industrielle
M. CALMON	Techniques Agricoles
M. TRUCHASSON	Mécanique
M. VERDIER	Physique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

M. PUN
M. PARKS

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

M. BEAUFILS	Informatique
M. DARROZES	Mécanique
Mlle BARBANCE	Mathématiques
M. PRADINES	Mathématiques

Personnel de l'Université Paul Sabatier affecté à l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse

PROFESSEURS

M. ROQUES	Chimie Industrielle
M. GRATELOUP	Génie Electrique
M. MASO	Génie Civil

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. CASSIGNOL	Génie Electrique
M. COLLETTE	Physique

MAITRES DE CONFERENCES

M. FAGET	Physique
M. SCHUTTLER	Physique
M. MIRA	Génie Electrique
M. LETURCQ	Génie Electrique
M. SIRIEYS	Génie Civil
M. DURAND G.	Chimie
M. CARRARA	Physique

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

M. VERDIER	Chimie
M. BROUSSEAU	Physique

Personnel affecté à l'Institut Universitaire de Technologie de Toulouse

MAITRES DE CONFERENCES

M. MARTIN	Génie Electrique
M. PERENNOU	Informatique
M. THENOZ	Minéralogie

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

M. REY	Génie Electrique

ADMINISTRATION

M. PRINEAU	Secrétaire Général de l'Université

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546526_0023

Ce mémoire est dédié à
l'évolution de la connaissance.

TABLE DES MATIERES

Avant Propos

Introduction 1

Chapitre 1 - Recherche systèmatique des extréma d'une fonction à deux variables 7

1-1 - Introduction
1-2 - Définitions et propriétés relatives aux récurrences 9
1-3 - Méthode de recherche multiextrémale 17
1-4 - Exemples illustratifs 30
1-5 - Conclusions 42

Chapitre 2 - Stabilité d'un point double d'une récurrence d'ordre quelconque dans un cas critique avec deux multiplicateurs complexes conjugués de module unité. 49

2-1 - Introduction 51
2-2 - Résultats théoriques dans le cas général 52
2-3 - Détermination des nouveaux coefficients dans le cas de récurrence du troisième ordre 60
2-4 - Cas d'une récurrence du quatrième ordre 69
2-5 - Application à une récurrence du troisième ordre 76

Annexe 2 A - Calculs relatifs aux nouveaux coefficients de la récurrence du troisième ordre 79

Annexe 2 B - Calcul des termes de ΔV dans la détermination de G_1 87

Chapitre 3 - Application des résultats sur la stabilité de certains cas critiques à des systèmes à données échantillonnées 91

3-1 - Introduction 93
3-2 - Régulateurs non linéaires échantillonnés. Problème de Lur'e. 93
3-3 - Système échantillonné non linéaire avec bloqueur d'ordre un 101

Annexe 3 A - Problème de Lur'e : Calcul des divers groupes de coefficients 127

Annexe 3 B - Problème de Lur'e : Calcul de G_1 135

Annexe 3 C - Multiplicateurs des récurrences du 3ème ordre 139

Chapitre 4 - Analyse du comportement d'un système conservatif non linéaire décrit par une équation différentielle du second ordre avec un coefficient périodique. 151

4-1 - Introduction 153
4-2 - Solution analytique 154
4-3 - Interprétation des solutions partielles 161
4-4 - Etablissement des récurrences associées 163
4-5 - Comportement du système autour de l'origine du plan de phase 174

Annexe 4 A - Définitions et propriétés de base des fonctions élliptiques 185

Annexe 4 B - Calcul des solutions partielles quand $f(\omega t) = -1$, et aux différents cas de la valeur de C. 191

Annexe 4 C - Développements de x_{n+1} et y_{n+1} 203

Conclusions 215

Bibliographie 219

AVANT-PROPOS

Nous exprimons notre profonde gratitude à Monsieur le Professeur LAGASSE, Directeur du Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales du C.N.R.S. pour l'accueil qu'il nous a réservé et pour les moyens matériels mis à notre disposition. Sans sa sympathie, sans sa bienveillante compréhension, sans le rayonnement de ses profondeurs humaines, nous n'aurions jamais pu terminer le travail de ce mémoire.

Nous remercions vivement Monsieur le Professeur GUMOWSKI de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Genève, et physicien au C.E.R.N. de l'intérêt qu'il a voulu porter à ce travail, intérêt manifesté par la suggestion d'un de nos sujets de recherche, et par l'acceptation de participer au jury d'examen de ce mémoire.

Nous remercions également Monsieur le Professeur VIDAL de l'Université de Lille d'avoir bien voulu accepter de siéger à notre jury. Ses connaissances étendues dans les domaines abordés par notre travail le désignent tout particulièrement pour cette tâche.

Nous remercions particulièrement Monsieur le Professeur SEVELY, de l'Université de Toulouse, de l'amitié qu'il nous a témoignée tout le long de nos recherches, et de l'honneur qu'il a bien voulu nous faire en acceptant d'examiner notre travail, malgré ses nombreuses occupations.

Il est difficile de trouver des mots pour exprimer ce que nous devons à Monsieur le Professeur MIRA, de l'Université de Toulouse. Nous le remercions d'avoir accepté de diriger nos recherches. Non seulement nous bénéficions de ses conseils mais aussi de ses enseignements quotidiens et de ses nombreuses discussions fructueuses. C'est en outre le rayonnement de son amicale compréhension qui nous a aidé à traverser, sans trop de dégâts, bien des frontières dangereuses.

Enfin, nous aimerions bien remercier les collègues du Groupe A.C.S.C. (Algorithmes et conception des systèmes de commande), dirigé par le Professeur MIRA, plus particulièrement Messieurs les Docteurs GIRAUD, BABARY, ROUBELLAT et ABATUT, pour les nombreux et intéressants échanges ; le Service de Documentation dirigé courageusement et efficacement par Madame M.T. IPPOLITO pour ses nombreux services ; et tout le personnel du L.A.A.S. qui nous a aidé d'une façon ou d'une autre.

Nous tenons aussi à souligner l'aide apportée par la Direction des Recherches et Moyens d'Essais du Ministère des Armées au L.A.A.S. dans le cadre du contrat relatif aux récurrences et leurs applications.

INTRODUCTION

L'importance que prend les ordinateurs dans la commande des processus devient chaque jour plus grande. L'ensemble constitué par les ordinateurs et les processus est mathématiquement décrit par des équations aux différences ou des récurrences souvent non linéaires. Si, pour les systèmes continus, on dispose de l'arsenal des propriétés des solutions concernant les équations différentielles ordinaire, suite aux travaux tels que ceux de Poincaré, Liapunov Pour les systèmes discontinus par contre, il existe très peu de résultats.

Pressentant l'importance de l'étude de ces systèmes, une équipe de recherche a été créée, dès 1963, au sein du Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales (à l'époque Laboratoire de Génie Electrique de l'Université de Toulouse), pour étudier les propriétés des solutions des récurrences non linéaires du type

$$\underline{V}_{n+1} = \underline{F}\ (\underline{V}_n\ ,\ n) \tag{01}$$

V étant un vecteur à s dimensions, s et n des entiers positifs. Ces récurrences décrivent justement le comportement des systèmes non linéaires à données échantillonnées multidimensionnels, tels que ceux constitués par les processus commandés par des ordinateurs, en établissant une relation entre les états du vecteur V pris à deux instants successifs t_{n+1} et t_n.

Menées d'une façon systématique au L. A. A. S., les activités de recherche sur les récurrences ont d'ores et déjà produit un certain nombre de résultats [10 à 31] , justifiant amplement l'axe choisi. Ces résultats portent aussi bien sur l'aspect théorique des solutions que sur l'aspect pratique des applications. Le point de départ des recherches a été l'analyse des récurrences autonomes à variables réelles du deuxième ordre de la forme

$$\begin{cases} x_{n+1} = f\ (x_n\ ,\ y_n) \\ y_{n+1} = g\ (x_n\ ,\ y_n) \end{cases} \tag{02}$$

Les principaux résultats théoriques obtenus sont les suivants :

- l'analyse des états stationnaires (points doubles, cycles, zones transitives au sens de Birkhoff) de telles équations, c'est-à-dire leur nature en précisant notamment les conditions de stabilité locale et globale. Ce dernier point demande en particulier la détermination du domaine complet (D) d'influence d'un état stationnaire stable dans le plan de phase discret. Il faut noter particulièrement la mise au point de programme de calculs [25] permettant de déterminer la frontière (F) d'un tel domaine d'influence.

- l'étude de cas critiques au sens de Ljapunov qui apparaissent lorsqu'une racine de l'équation caractéristique (multiplicateur) a son module égal à l'unité, l'autre ayant son module inférieur à l'unité. Deux cas sont à envisager selon que les multiplicateurs sont réels ($S_1 = \pm 1$, $|S_2| < 1$) ou complexes $S_{1,2} = e^{\pm j\varphi}$. L'analyse de la stabilité de la singularité, dans le 1er cas, a été complétée d'une étude de l'allure des trajectoires discrètes au voisinage du point double. Dans le 2ème cas, multiplicateurs complexes conjugués, il a été montré qu'en dehors des "cas d'exception" obtenus pour φ commensurables avec 2π , on avait à faire à un foyer possédant une certaine multiplicité. Les conditions de stabilité ont été obtenues par deux voies différentes (fonction de Ljapunov et substitution de Cigala) [32] et [33].

- l'étude des changements de comportement qualitatif de la solution d'une récurrence, lorsque sous l'effet d'une variation de paramètre, il se produit la traversée d'un cas critique. Lors de la traversée d'un cas critique avec multiplicateurs réels, les travaux ont porté sur la détermination des singularités qui peuvent apparaître (points doubles ou cycles). La traversée d'un cas critique, avec multiplicateurs complexes donne naissance à une trajectoire discrète fermée, attractive ou répulsive suivant les cas, entourant la singularité. Cette propriété permet d'expliquer la transformation d'une solution périodique en une solution presque périodique.

- l'étude des cas d'exception obtenus pour certaines valeurs de $\varphi = 2k\pi/q$ quand les multiplicateurs sont complexes conjugués et de module égal à l'unité $S_{1,2} = e^{\pm j\varphi}$

Du point de vue pratique, les différents domaines d'applications ont été les suivants :

- différents types de systèmes asservis à données échantillonnées avec une non linéarité essentielle, avec durée d'échantillonnage nulle ou non nulle [26, 27, 28]

- redresseurs de courant alternatif fonctionnant en boucle fermée [25, 26]

- - systèmes commandés par impulsions modulées en fréquence (IPFM) [22, 29]

- systèmes linéaires à paramètre variant périodiquement dans le temps et application à l'analyse et à la synthèse des amplificateurs paramétriques [23, 30]

L'énumération de ces résultats nous permet de situer le travail présenté dans ce mémoire :

- utilisation du programme de recherche de cycles mis au point dans [25] en vue de la recherche systématique des extrêma d'une fonction à deux variables avec et sans contraintes.

- résolution du problème de la stabilité d'un point double d'une récurrence d'ordre $m > 2$, en présence d'un cas critique, avec deux multiplicateurs complexes conjugués de module unité.

- application de ces résultats à la résolution du problème dit de "Lur'e" dans le cas d'un asservissement à données échantillonnées non linéaires d'ordre quelconque et à la résolution du problème de la stabilité lorsque le bloqueur est d'ordre un.

- analyse du comportement d'un système conservatif non linéaire décrit par une équation différentielle du deuxième ordre avec un coefficient périodique à l'aide des propriétés des solutions d'une récurrence associée, phénomène de résonance paramétrique.

Ces quatre points constituent les quatre chapitres de notre mémoire.

Le premier chapitre traite de la recherche systématique des extrema d'une fonction à deux variables avec et sans contraintes. A ce propos, nous montrons comment nous pouvons immerger le problème de recherche multi extrémale dans le problème de résolution d'un système de deux équations à deux inconnues, pouvant ainsi utiliser le programme de recherche de cycles mis au point dans [25]. La méthode proposée a alors l'avantage par rapport aux méthodes classiques d'éviter une réinitialisation de la recherche lorsqu'un extrémum a été trouvé, et d'être ainsi très rapide.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un cas critique de stabilité au sens de Ljapunov qui se présente lorsqu'un point double d'une récurrence non linéaire, d'ordre quelconque, possède deux multiplicateurs complexes conjugués de module unité, les autres ayant leur module inférieur à un. Il est alors montré que la stabilité asymptotique du point double est fixée par le signe d'une expression faisant intervenir les coefficients de certains termes de la récurrence, en se ramenant, après transformation, à un cas qui est résolu par la stabilité du point double d'une récurrence du deuxième ordre.

Deux applications à des problèmes de systèmes à données échantillonnées font l'objet du troisième chapitre. Tout d'abord, les résultats du deuxième chapitre et d'autres résultats obtenus au L.A.A.S. sont utilisés pour résoudre un problème de détermination d'une frontière dangereuse ou non dangereuse au sens de Bautin pour un système à information discrète d'ordre quelconque, avec une non linéarité, ce qui constitue l'équivalent d'un problème posé dans le cas continu par Lur'e et résolu par Malkin. Ensuite, nous traitons le cas d'un système du 2ème ordre avec bloquer d'ordre un, ce qui conduit à une récurrence du 3ème ordre.

Dans le quatrième chapitre, nous abordons le problème du comportement des solutions de l'équation différentielle non linéaire à coefficient périodique

$$x'' + k_1 . x + k_2 . f(\omega t) . x^3 = 0$$

$f(\omega t)$ étant un signal périodique constant par morceau, qui est lié au comportement d'un accélérateur de particules. Nous sommes arrivés à montrer que la solution de cette équation différentielle est différente selon la région du

plan de phase où se trouvent le point des conditions initiales, et que le nombre de ces régions est fini. Puis, à cette équation différentielle, nous avons pu associer une récurrence dont l'étude permet d'analyser les cas d'exception liés aux phénomènes de résonance paramétrique.

CHAPITRE 1

RECHERCHE SYSTEMATIQUE DES EXTREMA D'UNE FONCTION A DEUX VARIABLES

1 - Introduction

2 - Définition et propriétés relatives aux récurrences

- 2-1 - Récurrence et transformation
- 2-2 - Singularités, multiplicateurs et pentes
- 2-3 - Lignes analytiques invariantes et séparatrices
- 2-4 - Propriétés des systèmes grossiers

3 - Méthode de recherche multi extrémale

- 3-1 - Immersion du problème de minimisation
- 3-2 - Transformation du comportement des points singuliers
- 3-3 - Base de la méthode
- 3-4 - Mise en oeuvre

4 - Exemples illustratifs

- 4-1 - Une fonction du quatrième degré
- 4-2 - Une autre fonction du quatrième degré
- 4-3 - Un essai de comparaison

5 - Conclusions

1 - INTRODUCTION

Dans les problèmes d'optimisation, l'objectif principal est la recherche d'un minimum ou d'un maximum du critère. De nombreuses méthodes itératives ont été proposées pour atteindre cet objectif [33, 34, 35, 36] . Malheureusement, ces méthodes n'ont qu'une portée locale ; elles ne permettent pas de trouver systématiquement l'extremum absolu.

Dans cette étude, nous proposons une méthode systématique qui prospecte les extrema l'un après l'autre sans avoir à reinitialiser le problème chaque fois qu'un extremum relatif est trouvé. L'idée principale de la méthode est d'associer à la recherche des extrema, la recherche des racines d'un système d'équations algébriques. Pour cela on utilise en particulier les résultats de [25] , basés sur la méthode des intégrateurs, mais modifiée et discrétisée, amenant ainsi à une formulation par récurrence.

L'étude comprend trois parties. Dans la première nous exposons brièvement quelques définitions et propriétés relatives aux récurrences, indispensables à la compréhension de la méthode. Dans la deuxième partie, les différents points principaux de la méthode sont exposés. Dans la troisième partie, nous montrons les résultats d'essais de la méthode sur deux types différents de fonctions du 4è degré.

2 - DEFINITIONS ET PROPRIETES RELATIVES AUX RECURRENCES

2-1 - Récurrence et transformation

Nous ne mentionnerons ici que les définitions et propriétés nécessaires à l'exposé de notre méthode (voir détail aux réf. 10 et 13).

Nous considérons uniquement les récurrences autonomes du 2ème ordre de la forme

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n)$$

(1-1)

$$y_{n+1} = g(x_n, y_n)$$

où n est un nombre entier positif ou nul, x et y des variables réelles, f et g des fonctions réelles. Ce système peut représenter par exemple un système à données échantillonnées, ou la forme discrétisée d'une équation différentielle. L'équation (1-1) définit une transformation ponctuelle T qui fait passer dans l'espace x, y un point M_n en M_{n+1} appellé conséquent de M_n. Le point M_{n-1} transformé du point M_n par application de la transformation ponctuelle

inverse T^{-1}, s'appelle antécédent de M_n. Si f et g sont uniformes, l'ensemble des conséquents d'un point quelconque M_n forme une trajectoire discrète, invariante en appliquant T [3, 4]

Notons que, quand f et g sont non linéaires, T^{-1} contient des puissances $\geqslant 2$ de x_n et y_n, les antécédents M_{n-1} de M_n peuvent ne pas être uniques (figure 1).

II-2 - Singularités, multiplicateurs et pentes

Parmi les singularités (points singuliers, points d'équilibre) d'une récurrence, les points doubles et les cycles seront celles qui seront rencontrées dans notre étude.

Un point double, dans le cas d'une récurrence autonome du 2ème ordre, satisfait les relations :

$$x_{n+1} = x_n = f(x_n, y_n) \tag{1-2}$$

$$y_{n+1} = y_n = g(x_n, y_n) \tag{1-3}$$

tandis qu'un point de cycle d'ordre m, m entier positif, est un point double de la transformation T^m qui exprime (x_{n+m}, y_{n+m}) en fonction de (x_n, y_n) sans être point double de T^l, $1 < m$.

Soient α et β les coordonnées d'un point double. On suppose que f et g soient telles que, en ramenant l'origine en ce point double, on peut écrire la récurrence transformée sous la forme :

$$\begin{aligned} x^*_{n+1} &= a x^*_n + b y^*_n + \overline{X}(x^*_n, y^*_n) \\ y^*_{n+1} &= c x^*_n + d y^*_n + \overline{Y}(x^*_n, \overline{Y}^*_n) \end{aligned} \tag{1-4}$$

avec

$$\lim_{x^*_n, y^*_n \to 0} \frac{\overline{X}}{|x^*_n| + |y^*_n|} = 0 \quad ; \quad \lim_{x^*_n\ y^*_n \to 0} \frac{\overline{Y}}{|x^*_n| + |y^*_n|} = 0$$

$$\overline{X}(0,0) = 0 \qquad \overline{Y}(0,0) = 0$$

$$a = f'_{x_n}(\alpha, \beta) \quad ; \quad b = f'_{y_n}(\alpha, \beta) \quad ; \quad c = g'_{x_n}(\alpha, \beta) \quad , \quad d = g'_{y_n}(\alpha, \beta)$$

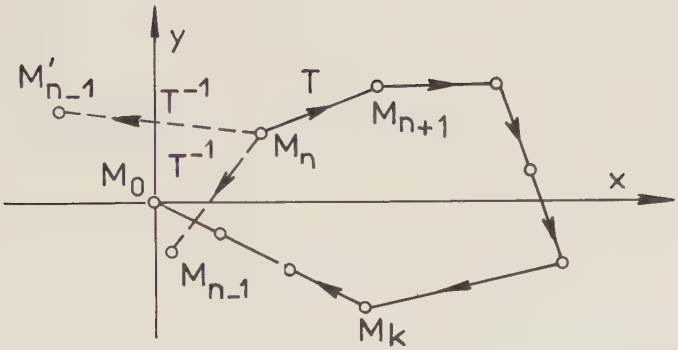


Figure 1 : M_{n+1} : conséquent de M_n par T
M_{n-1}, M'_{n-1} : antécédents de M_n par T^{-1}
M_n, M_{n+1}, M_k . . . . M_o : trajectoire discrète

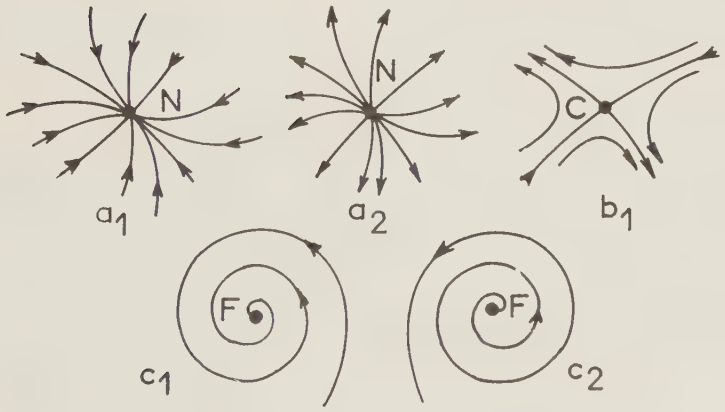


Figure 2 : Différents types de points doubles pour équations différentielles
a_1) noeud stable - a_2) noeud instable
b_1) col
c_1) foyer stable - c_2) foyer instable

si les dérivées existent.

La matrice des coefficients des termes linéaires des équations (1-4) fournit l'équation caractéristique second degré en

$$(1\text{-}5) \qquad \begin{vmatrix} a-s & b \\ c & d-s \end{vmatrix} = 0$$

Les racines S_1 et S_2 de l'équation (1-5) s'appellent multiplicateurs, ce sont les valeurs propres associées à la matrice $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. On appelle axes principaux les deux vecteurs propres de cette matrice, dont les pentes sont données par :

$$(1\text{-}6) \qquad p_1 = \frac{S_1 - a}{b} = \frac{c}{S_1 - d} \quad ; \quad p_2 = \frac{S_2 - a}{b} = \frac{c}{S_2 - d}$$

Il existe une relation, essentielle pour la suite, entre le module des multiplicateurs et la stabilité du point double. On sait qu'il y a stabilité (le point double est attractif) si $|S_1|$ et $|S_2| < 1$, il y a instabilité (le point double est répulsif) si l'un des deux multiplicateurs ou les deux, en module, sont > 1. On se trouve dans un cas critique si $|S_1|$ ou $|S_2| = 1$, l'autre étant de module < 1 ; ce dernier devant être étudié à part.

Il existe aussi d'autres relations entre les multiplicateurs et les types des points doubles. En dehors des cas critiques, il existe trois catégories de points doubles [5, 6] (figure 2).

- les noeuds sont tels que S_1 et S_2 sont réels ;
  ils sont instables si $|S_1|$ ou $|S_2| > 1$
  ils sont stables si $|S_1|$ et $|S_2| < 1$.

- les cols sont tels que S_1 et S_2 sont réels, l'un des $|S|$ étant inférieur à l'unité et l'autre $|S|$ supérieur à l'unité ; ces points sont toujours instables.

- les foyers sont tels que S_1 et S_2 sont complexes conjugués $S_{12} = \rho e^{\pm j\varphi}$ ils sont stables si $\rho < 1$ et instables si $\rho > 1$.

2-3 - Lignes analytiques invariantes et séparatrices

Lorsque les seconds membres de (1-1) sont analytiques, Lattes [5, 6] a montré que, si, en un point double P, S_1 et S_2 sont réels et distincts, de module différent de 0 et de 1, et si $S_1 \neq S_2^q$, et $S_2 \neq S_1^q$ (q entier), il existe 2 courbes analytiques invariantes et 2 seulement passant par le point double P, tangentes aux axes principaux et définis dans un certain voisinage de ce point. Si P est un col, ce sont les deux seules courbes invariantes passant par le point P.

Prenons (1-1) définissant une transformation ponctuelle T. La suite des points M_0, M_1 obtenus par l'application successive de T forme une trajectoire. Une séparatrice est une trajectoire, séparant le plan en deux zones de comportement qualitatif différent. Par exemple (figure 3), dans la zone A, les points M_i sont attirés, par application successive de T, vers un certain point singulier P_3. Tandis que dans la zone B, les points M_j sont attirés vers un autre point singulier P_4.

2-4 - Propriétés des systèmes grossiers

La méthode dont la description suit au prochain paragraphe utilise certaines propriétés des systèmes grossiers. La théorie de ces derniers a été établie par Andronov et Pontryagin [2, 57, 58] dans le cas des systèmes décrits par des équations différentielles autonomes du second ordre :

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y) \qquad (1\text{-}7)$$

définies dans un domaine déterminé G du plan x, y, P et Q étant des fonctions de classe C_1, c'est-à-dire sont continues et ont leurs dérivées partielles premières, par rapport à x et y, continues.

Le système dynamique décrit par (1-7) est dit grossier, au sens d'Andronov-Pontryagin si son comportement qualitatif n'est pas affecté par des variations suffisamment petites de P (x, y), Q (x, y) et des dérivées partielles premières, ou encore si dans le plan de phase x, y, la structure topologique des trajectoires de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \qquad (1\text{-}8)$$

ne change pas pour de petites variations de P et Q.

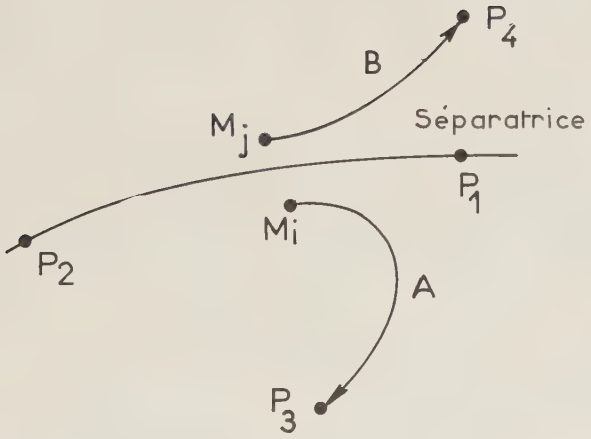


Figure 3 : Trajectoire et séparatrice

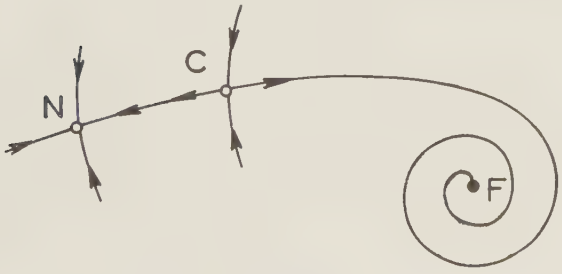


Figure 4 : Liaisons entre les singularités

Dans le cas des systèmes dynamiques décrits par les récurrences autonomes du 2ème ordre (1-1), la définition précédente peut être étendue de la façon suivante. Les systèmes dynamiques décrits par (1-1), (avec f et g de classe C_1), sont dits grossiers au sens d'Andronov Pontryagin, si leur comportement qualitatif n'est pas affecté par des variations suffisamment petites de f (x_n, y_n) et g (x_n, y_n) et des dérivées partielles premières ; ou encore si dans le plan de phase x_n, y_n, la structure topologique des trajectoires décrites de (1-1) ne change pas pour des petites variations de f et g.

Parmi les propriétés des systèmes grossiers, celles qui nous intéresseront sont :

1° - Les points doubles, et les cycles seront simples, c'est-à-dire : ou noeud, ou col, ou foyer (stables ou instables).

2° - Si l'on initialise sur la direction principale d'un col P pour laquelle P est répulsif pour les points de cette direction, on suit une séparatrice et on aboutit nécessairement ou à un noeud stable, ou à un foyer stable, ou à un cycle stable, mais pas à un autre col.

3 - METHODE DE RECHERCHE MULTI EXTREMALE

3-1 - Immersion du problème de minimisation

Nous examinerons trois types de problèmes de minimisation :

- minimisation sans contrainte

(1-10) $$\min_{x,y} f \triangleq f(x,y)$$

- minimisation avec contrainte d'égalité

(1-11) $$\min_{x,y} f \triangleq f(x,y) \quad , \quad g(x,y) = 0$$

- minimisation avec contrainte d'inégalité

(1-12) $$\min_{x,y} f \triangleq f(x,y) \quad , \quad h(x,y) \leq 0$$

Etant donné que la méthode que nous allons utiliser est élaborée initialement pour résoudre des systèmes d'équations algébriques, nous allons "immerger" nos problèmes de minimisation dans un problème de recherche des racines.

3-1-1- Minimisation sans contrainte

Les conditions nécessaires fournissent le système d'équations algébriques non linéaires

$$f_x \triangleq \frac{\partial f}{\partial x} = p(x,y) = 0$$

(1-13)

$$f_y \triangleq \frac{\partial f}{\partial y} = q(x,y) = 0$$

qu'on tâchera de résoudre. Les racines trouvées étant seulement des points stationnaires il faut tester le signe de la matrice des dérivées secondes

(1-14)

$$F_{xx} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Cette procédure restreint l'ensemble des fonctions f traitables. Ces dernières doivent être dérivables jusqu'au second ordre. On verra par ailleurs une autre exigence, la matrice F_{xx} doit être non singulière pour que la méthode fonctionne théoriquement.

3-1-2 - Minimisation avec contrainte d'égalité

Utilisant la méthode de Lagrange, nous formons

$$\varphi = f - \lambda g.$$

Les conditions nécessaires donnent :

(1-15) $$f_x - \lambda g_x = 0$$

(1-16) $$f_y - \lambda g_y = 0$$

(1-17) $$g = 0$$

Les équations (1-15) et (1-16) donnent :

(1-18) $$\lambda = \frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}$$

nous permettant d'immerger notre problème dans celui de la recherche des racines de :

(1-19) $$p(x,y) \triangleq \frac{f_x}{g_x} - \frac{f_y}{g_y} = 0$$
$$q(x,y) \triangleq g(x,y) = 0$$

Nous savons que, aux points stationnaires, les gradients ∇f et ∇g des fonction f et g son colinéaires.

La matrice des dérivées de p et q en fonction de celles de f et g est :

(1-20) $$M = \begin{bmatrix} \frac{F_{xx} g_x - f_x G_{xx}}{g_x^2} - \frac{F_{xy} g_y - f_y G_{xy}}{g_y^2} & \frac{F_{xy} g_x - f_x G_{xy}}{g_x^2} - \frac{F_{yy} g_y - f_y G_{yy}}{g_y^2} \\ g_x & g_y \end{bmatrix}$$

Pour que M soit non singulière, il faut que l'expression suivante soit différente de zéro :

$$(1\text{-}21)\quad M = g_y\left(\frac{F_{xx}\,g_x - f_x G_{xx}}{g_x^2} - \frac{F_{xy}\,g_y - f_y G_{xy}}{g_y^2}\right) - g_x\left(\frac{F_{xy}\,g_x - f_x G_{xy}}{g_x^2} - \frac{F_{yy}\,g_y - f_y G_{yy}}{g_y^2}\right)$$

En groupant les F et les G, et en utilisant la première équation

$$\left(\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}\ ,\ \frac{f_x}{f_y} = \frac{g_x}{g_y}\ \text{aux points stationnaires}\right)$$

$$(1\text{-}22)\quad M = \left(\frac{g_y}{g_x}F_{xx} + \frac{g_x}{g_y}F_{yy} - 2F_{xy}\right) - \frac{f_x}{g_x}\left(G_{xx} - 2G_{xy} + G_{yy}\right)$$

$$(1\text{-}23)\quad M = \left(\frac{f_y}{f_x}F_{xx} + \frac{f_x}{f_y}F_{yy} - 2F_{xy}\right) - \frac{f_x}{g_x}M_G$$

Dans le cas exceptionnel où le minimum contraint $(\hat{X},\ \hat{Y})$ est aussi un minimum non contraint, $f_X(\hat{X},\ \hat{Y}) = 0$, $f_Y(\hat{X},\ \hat{Y}) = 0$, ce qui conduit approximativement à

$$\frac{f_x}{\Delta x} \cong F_{xx}\ ,\ \frac{f_y}{\Delta y} \cong F_{yy}\ ,\ \frac{f_y}{\Delta x} \cong F_{xy}\qquad \frac{f_x}{\Delta y} \cong F_{xy}$$

l'équation (1-23) devient :

$$(1\text{-}24)\quad M = \left(F_{xy} + F_{xy} - 2F_{xy}\right) - \frac{f_x}{g_x}M_G$$

$$= -\frac{f_x}{g_x}M_G$$

3-1-3 - Minimisation avec contrainte d'inégalités

Etant donné que le minimum peut se trouver ou sur, ou à l'intérieur du domaine limité par la contrainte, nous nous trouvons devant un cas plus complexe. Même dans les problèmes où les fonctions sont unimodales, on ne connaît pas de méthode [31, 33] de résolution satisfaisante.

Il y a toutefois une différence entre le problème traité relatif aux fonctions à un seul extrémum et celui relatif aux fonctions à plusieurs extréma . Dans le premier cas, arriver à l'extrémum est tout le travail. Tandis que dans le second cas, il est nécessaire de trouver tous les extréma locaux et de les comparer entre eux pour déterminer l'extrémum global.

La seule façon élégante de procéder est de chercher systématiquement tous les extréma à l'intérieur et sur la frontière de la contrainte. C'est ce que permet de faire la méthode proposée, en immergeant le problème de minimisation avec contrainte d'inégalité en deux problèmes successifs

- problème 1

$$\left.\begin{aligned} p_1(x,y) &\triangleq f_x = 0 \\ q_1(x,y) &\triangleq f_y = 0 \end{aligned}\right] \longrightarrow \text{solutions } (\hat{x}_i, \hat{y}_i)$$

- problème 2

$$\left.\begin{aligned} p_2(x,y) &\triangleq \frac{f_x}{h_x} - \frac{f_y}{h_y} = 0 \\ q_2(x,y) &\triangleq h(x,y) = 0 \end{aligned}\right] \longrightarrow \text{solutions } (\hat{x}_j, \hat{y}_j)$$

on compare ensuite les solutions i et j pour trouver le minimum minimorum.

Dans tous les cas, le problème de minimisation se trouve immergé dans celui de résolution d'un système d'équations algébriques à deux inconnues ; ce dernier étant transformé en une récurrence du deuxième ordre en utilisant la méthode des intégrateurs discrétisée. Les idées directrices de notre méthode systématique de recherche se résument ainsi : [25]

1° - coincidence entre les points extrémaux (points stationnaires) de la fonction d'origine et les points doubles de la récurrence.

2° - Initialisation et obtention d'un premier point double stable de la récurrence en utilisant la méthode du gradient puis la méthode de Newton, plus rapide dans un voisinage plus petit du point double.

3° - Déstabilisation de ce point en le rendant de type col assurant ainsi un départ dans les meilleures conditions.

4° - Cheminement le long d'une ligne invariante qui aboutit nécessairement à un état stationnaire stable (point double ou cycle).

5° - Prospection systématique des directions principales de tous les points stationnaires transformés en cols. On assure l'obtention de tous les points extrémaux sauf peut être, dans une recherche pratique, lorsque le problème d'origine conduit à une récurrence voisine d'un cas de non grossièreté .

Ci-après, nous décrivons quelques opérations nécessaires pour la transformation des natures des points singuliers. Nous le faisons en nous appuyant sur les systèmes différentiels. La même description est valable pour les récurrences.

3-2 - Transformation du comportement des points singuliers

3-2-1 - Résolution d'un système d'équation algébrique non linéaire

Soit à résoudre le système (1-13). La méthode des intégrateurs consiste à lui associer un système d'équations différentielles

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(x,y) \\ \\ q(x,y) \end{bmatrix} \tag{1-25}$$

où a, b, c, d, sont des constantes. Ce système est tel que ses points d'équilibre soient uniquement les solutions de (1-13).

La nature des points singuliers, cols, noeuds, foyers, correspondants continus des singularités des récurrences décrites précédemment dépend des valeurs propres de la matrice

$$\Omega = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p'x & p'y \\ q'x & q'y \end{bmatrix} \tag{1-26}$$

Si p, q sont données, leurs dérivées le sont aussi. On peut donc prédéterminer la nature des points singuliers en choisissant convenablement les coefficients a, b, c, d :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} p'x & p'y \\ q'x & q'y \end{bmatrix}^{-1} \tag{1-27}$$

de sorte que Ω ait les valeurs propres désirées.

3-2-2 - Cas d'un col

La singularité qui intéresse plus particulièrement notre méthode est le col. Soit un col P (figure 5). Les séparatrices L_1, L_2 d'une part, L_3, L_4 de l'autre, sont tangentes en ce point aux 2 axes principaux. Le point P est attractif par rapport aux points situés sur L_3 et L_4 et répulsif par rapport à ceux situés sur L_1 et L_2. En conséquence , L_1 et L_2 sont des trajectoires que l'on peut tracer en intégrant le système (1-25) initialisé par le point M_1, ou par le point M_2. Les points M_1 et M_2 sont situés de part et d'autre de P respectivement sur L_1 et L_2.

En pratique, les points M_1 et M_2 peuvent être pris sur les axes principaux en P tangents à L_1 et L_2. La faible erreur commise n'a pas de conséquence sur le tracé de la séparatrice, car cette dernière est elle-même attractive. Les coordonnées des points M_1 et M_2 se calculent facilement car on connaît les pentes des axes principaux au point P.

3-3 - Base de la méthode

La méthode est essentiellement basée sur les résultats obtenus dans [25] . Le but à atteindre est le suivant : partant d'une singularité quelconque de la récurrence, on suit systématiquement les séparatrices, pour aboutir

finalement à toutes les singularités sans jamais avoir à reinitialiser chaque fois qu'une singularité est atteinte. Les explications seront données en considérant le système différentiel $dx/dt = p$, $dy/dt = q$. Ensuite, on montrera la mise en oeuvre par discrétisation.

3-3-1 - Alternance des directions de départ au col

Appelons S^+ le système défini en (1-25). Soit P un point singulier du système (figure 5). On a vu qu'on peut toujours choisir convenablement les valeurs a, b, c, d, de sorte que P soit un col. Dans un tel cas, toute trajectoire initialisée en M_1 ou M_2 suivra les séparatrices L_1 ou L_2, et ira rejoindre certaines singularités.

Considérons maintenant le système S^- suivant :

$$S^- = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ \\ c' & d' \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} p(x,y) \\ \\ q(x,y) \end{bmatrix}$$

où les coefficients a', b', c' et d' sont choisis de telle sorte que :

1° le point P reste un col

2° le rôle des signes L_1, L_2 d'une part, L_3 et L_4 de l'autre, soit inversé. (L_3 et L_4 deviennent répulsives, et L_1, L_2 attractives).

Comme conséquence, on constate qu'en choisissant a, b, c, d, ou a', b', c', d' on peut partir de P le long de L_1, L_2 ou de L_3, L_4. Dans la pratique, on peut utiliser des coefficients relativement simples, par exemple :

(1-28)
$$S^+ \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(x,y) \\ \\ q(x,y) \end{bmatrix} , \quad S^- \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p(x,y) \\ \\ -q(x,y) \end{bmatrix}$$

3-3-2 - Alternance de la nature des singularités

Considérons un autre système S'^+

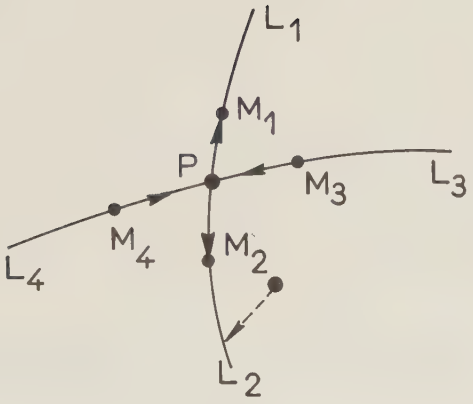


Figure 5 : Topologie d'un col

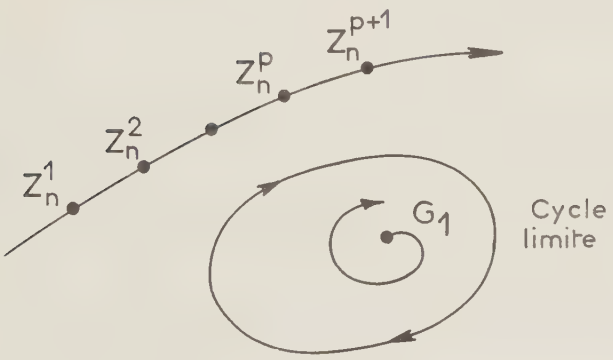


Figure 6 : Point double situé à l'intérieur
d'un cycle limite

$$S'^{+} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'' & b'' \\ \\ c'' & d'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(x,y) \\ \\ q(x,y) \end{bmatrix}$$

où les coefficients a'', b'', c'', d'' sont choisis de telle sorte que :

1°) les cols du système S^+ deviennent noeuds ou foyers stables de S'^+

2°) et que les noeuds et foyers stables de S^+ se transforment en cols de S'^+.

Dans [25], la conjecture suivante a été énoncée :
"En alternant le tracé des séparatrices des systèmes S^+ et S'^+, nous générons pas à pas toutes les séparatrices des cellules des systèmes S^+ et S'^+, et nous obtenons tous les points d'équilibre de S^+ et S'^+."

Dans la pratique, on peut utiliser des coefficients a'', b'', c'', d'' du système S'^+ et de son correspondant S'- relativement simples :

$$(1\text{-}29)\quad S'^{+} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +p(x,y) \\ \\ -q(x,y) \end{bmatrix} \quad ; \quad S'^{-} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p(x,y) \\ \\ +q(x,y) \end{bmatrix}$$

3-3-3 - Procédure d'ensemble

On suppose connu un point singulier P_o (si ce n'est pas le cas, on peut toujours initialiser la recherche qui réussira, si le point initial est dans la zone d'attraction d'un point singulier).

1°) Si P_o n'est pas un col, on le transforme en col par un choix adéquat de a, b, c, d. Désignons par S^+ le système qui en résulte.

2°) On chemine le long de L_1 d'abord, puis de L_2 et l'on aboutit soit à un noeud, soit à un foyer, soit à un cycle stables.

3°) On transforme le système S^+ en S'^+ alternativement, P_1 et P_2 sont devenus cols, par contre P_o est devenu noeud ou foyer. On prend P_1, on part dans les directions par rapport aux points desquelles P_o est répulsif et on aboutit à P_3 et P_4.

4°) On revient à P_2, et on part dans les directions par rapport aux points desquelles P_2 est répulsif et on aboutit à P_5 et P_6, foyer ou noeud stable ou à un cycle, (voir ci-dessous)

5°) On revient à P_3 et on choisit S'^+, départ, etc. Le 1er cycle des S^+ et S'^+ s'achève quand on ne retrouve plus que les mêmes points.

6°) On revient à P_o. On implante le système S^- et l'on part le long des séparatrices L_3 et L_4. On procède au 2è cycle comme au premier.

3-4 - Mise en oeuvre

L'ensemble des étapes de recherche mentionnées précédemment est mis en oeuvre sous forme d'un programme numérique [25]. La résolution des systèmes différentiels S^+ S'^+ S^- S'^- est effectuée par la discrétisation suivante (méthode d'Euler).

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(x_n, y_n) \\ q(x_n, y_n) \end{bmatrix} \tag{1-30}$$

h étant le pas de discrétisation. La récurrence T_a qui résulte de cette discrétisation possède les propriétés suivantes [2]

- les points doubles de (1-25) et (1-30) sont identiques
- les multiplicateurs des points doubles de T_a sont

$$S_i = 1 + h\lambda_i \tag{1-31}$$

λ_i étant les racines de l'équation caractéristique de (1-25).

- les axes principaux des points d'équilibre de (1-25) sont identiques à ceux des points doubles de T_a. Ces propriétés garantissent, pour le but recherché, la conformité de (1-30) et (1-25). Plusieurs précautions sont toutefois nécessaires pour la bonne exécution des recherches.

3-4-1 - Ajustage du pas

Pour que la recherche soit stable, il faut avant tout que tous les multiplicateurs S_i, pour les points que l'on désire atteindre, relatifs aux λ_i ayant

une partie réelle négative soient du module inférieur à 1. Ce qui donne, d'après (1-30), la borne supérieure h_M à ne pas dépasser par h.

A l'intérieur de la borne, il est intéressant en principe d'augmenter la longueur du pas (la valeur de h) jusqu'au maximum admissible pour accélérer la convergence. Toutefois, il y a un autre risque d'avoir un h trop grand, celui d'avoir un comportement oscillatoire de la trajectoire discrète, et pour finir, de quitter la zone d'attraction de la séparatrice.

Soient M_1, M_2, M_3 les points successifs de recherche et $\overline{M_1 M_2}$, $\overline{M_2 M_3}$ les vecteurs qu'ils forment. L'angle θ que forment ces vecteurs est utilisé comme un critère d'ajustage du pas. La longueur de ce dernier est diminuée quand θ s'approche de $\pi/2$, cette valeur caractérisant le seuil au delà duquel le comportement oscillatoire commence [25].

3-4-2 - Accélération par la méthode de Newton

Malgré un ajustage adéquat du pas, la méthode des intégrateurs est une méthode lente. Pour accélérer la convergence, la méthode de Newton est utilisée à l'approche du point double. La récurrence utilisée est alors :

$$(1\text{-}31)\qquad \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p'_x(x_n, y_n) & p'_x(x_n, y_n) \\ q'_x(x_n, y_n) & q'_y(x_n, y_n) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p\ (x-y) \\ q\ (x-y) \end{bmatrix}$$

faisant appel à l'inverse de la matrice des dérivées partielles p'_x p'_y q'_x et q'_y On sait que cette méthode converge rapidement mais elle a un petit domaine d'attraction. Avant d'utiliser cette méthode, il faut donc s'assurer que

1°) au moment du changement, on soit sûr de tendre vers le point double P par la méthode de Newton.

2°)on se trouve dans le domaine d'attraction de ce point.

Pour cela, on calcule le conséquent Z'^p_n du point courant Z^p_n par application de (1-31). Si les accroissements $\Delta_1 = + Z^{p+1}_n - Z^p_n$ et $\Delta_2 = Z'^p_n - Z^p_n$ ont un produit scalaire positif, la première condition est satisfaite. Si les dérivées partielles premières de la récurrence (1-30) aux points Z^p_n et Z'^p_n sont voisines, la seconde condition est satisfaite.

Ce test, ainsi que le précédent, sont appliqués toutes les 50 itérations.

3-4-3 - Point double situé à l'intérieur d'un cycle limite

Il existe des cas où il y a un point double M_0 situé à l'intérieur d'un cycle limite (figure 6). Les récurrences (1-30) et (1-31) deviennent alors inopérantes, puisque le point courant tournera sans cesse le long du cycle limite.

Soit $\underline{Z}_n^1 \; \underline{Z}_n^2 \; \cdots \; Z_n^p \; Z_n^{p+1}$ la suite des points de la trajectoire discrète. Pour vaincre la difficulté précédente, on mesure la somme θ des angles que font les vecteurs $\underline{Z}_n^p \; \underline{Z}_n^{p+1}$. Si θ dépasse 4π, on se trouve en présence d'un cycle limite. On procède alors ainsi :

1°) On repère les points le long de l'arc de $\pm 4\pi$ et on calcule leur centre de gravité, on obtient aussi un point G_1

2°) On recommence les itérations à partir de G_1. Si la trajectoire tourne encore de $\pm 2\pi$, on calcule le centre de gravité G_2 des nouveaux points. Ainsi de suite, quatre fois.

3°) A partir du dernier centre de gravité la méthode de Newton permet de mener directement au point double. Cette même méthode est valable pour les foyers, qui sont détectés ainsi plus rapidement, que par la récurrence habituelle.

4 - EXEMPLES ILLUSTRATIFS

4-1 - Une fonction du 4ème degré

4-1-1 - Formulation

Sans contrainte

$$\min_{x,y} \mathcal{Z} = (y-2)^2 (y+3)^2 + (x-3)^2 (x+5)^2$$

$$\mathcal{Z}_x = 4(x^3 + 3x^2 - 1 \quad 3x - 15) = 0$$

$$\mathcal{Z}_y = 4(y^3 + 1{,}5y^2 - 5{,}5y - 3) = 0$$

Récurrence associée

$$x_{n+1} = 4x_n^3 + 12x_n^2 - 51x_n - 60 = x_n + p$$

$$y_{n+1} = 4y_n^3 + 6y_n^2 - 21y_n - 12 = y_n + q$$

Dérivées pour l'algorithme de Newton

$$p'_x = +12x_n^2 + 24x_n - 51$$

$$p'_y = 0$$

$$q'_x = 0$$

$$q'_y = +12y_n^2 + 12y_n - 21.$$

Avec contrainte

$$\underset{x,y}{\text{Min}}\ z = (y-2)^2(y+3)^2 + (x-3)^2(x+5)^2$$

$$C = y + 7 - x^2 = 0$$

Récurrence associée

$$x_{n+1} = -x_n^3 - 3x_n^2 + 14x_n + 15 - x_n(2y_n^3 + 3y_n^2 - 11y_n - 6) = x_n + p.$$

$$y_{n+1} = -7 + x_n^2 = y_n + q.$$

$$p'_x = -3x^2 - 6x_n + 19 - 2y_n^3 + 11y_n + 3y_n^2$$

$$p'_y = -x_n(6y_n^2 + 6y_n - 11)$$

$$q'_x = 2x_n$$

$$q'_y = -1$$

4-1-2 - Résultats

Dans le cas sans contrainte , on connaît les points stationnaires théoriques de la fonction z, ce sont : (figure 7) :

A	(3	2)	Noeud
B	(3	-0, 5)	Col
C	(3	-3)	Noeud
D	(-1	2)	Col
E	(-1	-0, 5)	Noeud
F	(-1	-3)	Col
G	(-5	2)	Noeud
H	(-5	-0, 5)	Col
L	(-5	-3)	Noeud

Au programme principal de recherche, on a associé un sous-programme pour tracer les trajectoires de recherche. La recherche a été initialisée aux points (3, 2) et (3, 5 ; 2, 5). Les résultats obtenus sont identiques. Tous les 9 points sont trouvés sans difficultés. Les trajectoires de recherche sont des droites, elles sont partout orthogonales aux lignes equi-z. Ce comportement est attendu, et vérifie la bonne tenue de la méthode. En effet, la résolution du système (p, q) par la méthode des intégrateurs est équivalente à la minimisation de z par la méthode des gradients. Les résultats confirment aussi l'aspect systématique de la méthode ; les singularités sont rendues successivement stables d'abord (pour attirer), instables ensuite (pour partir sur un axe principal).

Dans le cas avec contrainte, les points stationnaires ne sont pas calculables facilement.

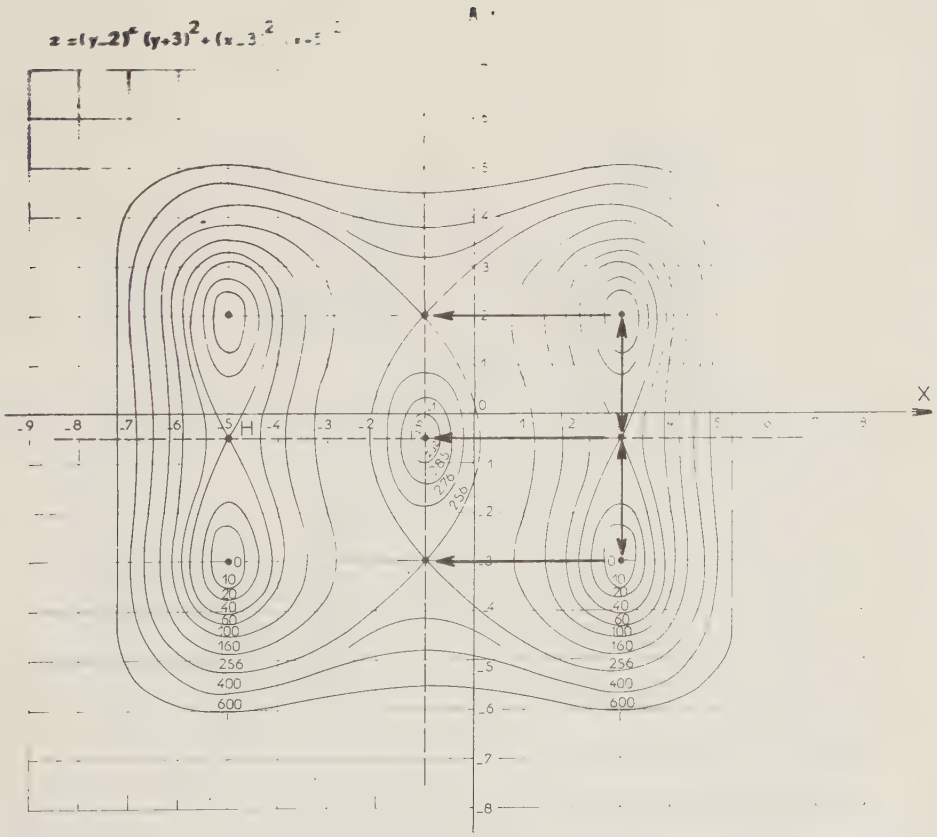
Initialisé successivement à (3 ; 2) et (3, 5 ; 2, 5), le programme a donné les mêmes résultats et on a trouvé 7 points stationnaires.

Point	x	y	z
M	3	2	0
N	-2, 4055	- 1, 2137	226, 2
O	-0, 0312	- 6, 999	1523
P	2, 4546	- 0, 9749	16, 6
Q	-3, 0499	2, 0716	144
R	2, 1249	- 2, 485	40, 06
S	-2, 0979	- 2, 599	222, 05

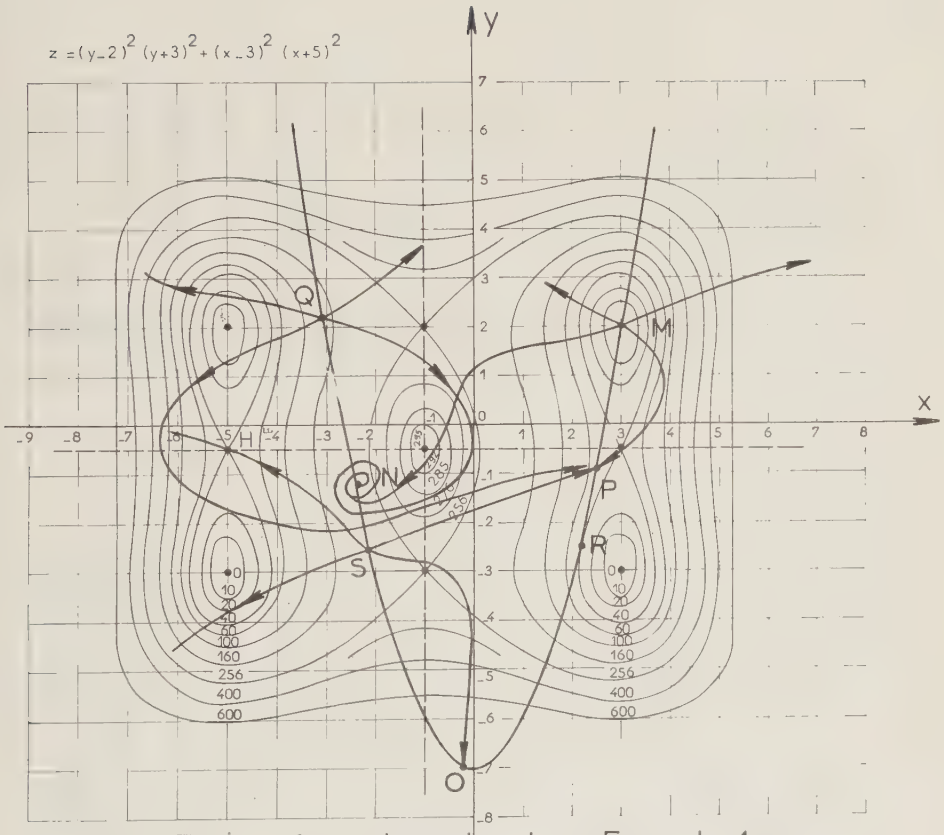
D'après les trajectoires de recherche (figure 8), on remarque facilement qu'aux points stationnaires, les gradients ∇c et ∇f sont colinéaires, ce qui est caractéristiques de la méthode de Lagrange. Pour certains points qui sont des foyers, on remarque aussi le comportement spiral à l'approche, conformément à l'algorithme utilisé. Le minimum absolu correspond au point M.

4-2 - Une deuxième fonction du 4ème degré

Comme contrainte, nous avons pris la même parabole.



_ Figure. 7_ Trajectoiresde recherche _ Exemple 1
Sans contrainte



_ Figure.8 _ Trajectoires de recherche . Exemple.1
Avec contraintes

4-2-1 - Formulation

Sans contrainte

$$\min_{x,y} z = (y-2)^2 (y+3)^2 + (x-3)^2 (x+5)^2 - x^2 y^2$$

$$z_x = 4(x^3 + 3x^2 - 13x - 15) - 2xy^2 = 0$$

$$z_y = 4(y^3 + 1{,}5y^2 - 5{,}5y - 3) - 2x^2 y = 0$$

Récurrence associée

$$x_{n+1} = +4x_n^3 + 12x_n^2 - 51x_n - 60 - 2x_n y_n^2 = x_n + p$$

$$y_{n+1} = +4y_n^3 + 6y_n^2 - 21y_n - 12 - 2x_n^2 y_n = y_n + q$$

Dérivées pour l'algorithme de Newton :

$$p'_x = +12x_n^2 + 24x_n - 52 - 2y_n^2$$

$$p'_y = -4x_n y_n$$

$$q'_x = -4x_n y_n$$

$$q'_y = +12y_n^2 + 12y_n - 21 - 2x_n^2$$

Avec contraintes

$$\min_{x,y} z = (y-2)^2 (y+3)^2 + (x-3)^2 (x+5)^2 - x^2 y^2$$

$$c = y + 7 - x^2 = 0$$

Récurrence associée

$$x_{n+1} = -x_n^3 - 3x_n^2 + 14x_n + 15 - 2{,}5x_n y_n^2 - x_n(2y_n^3 - 11y_n - 6 - x_n^2 y_n) =$$

$$= x_n + p.$$

$$y_{n+1} = -7 + x_n^2 = y_n + q$$

Dérivées pour l'algorithme de Newton

$$p'_x = -3x_n^2 - 6x_n + 19 - 2{,}5\,y_n^2 - 2y_n^3 + 11y_n + 3x_n^2 y_n$$

$$p'_y = -5x_n y_n + x_n^3 - 6x_n y_n^2 + 11x_n$$

$$q'_x = 2x_n$$

$$q'_y = -1$$

4-2-2 - Résultats

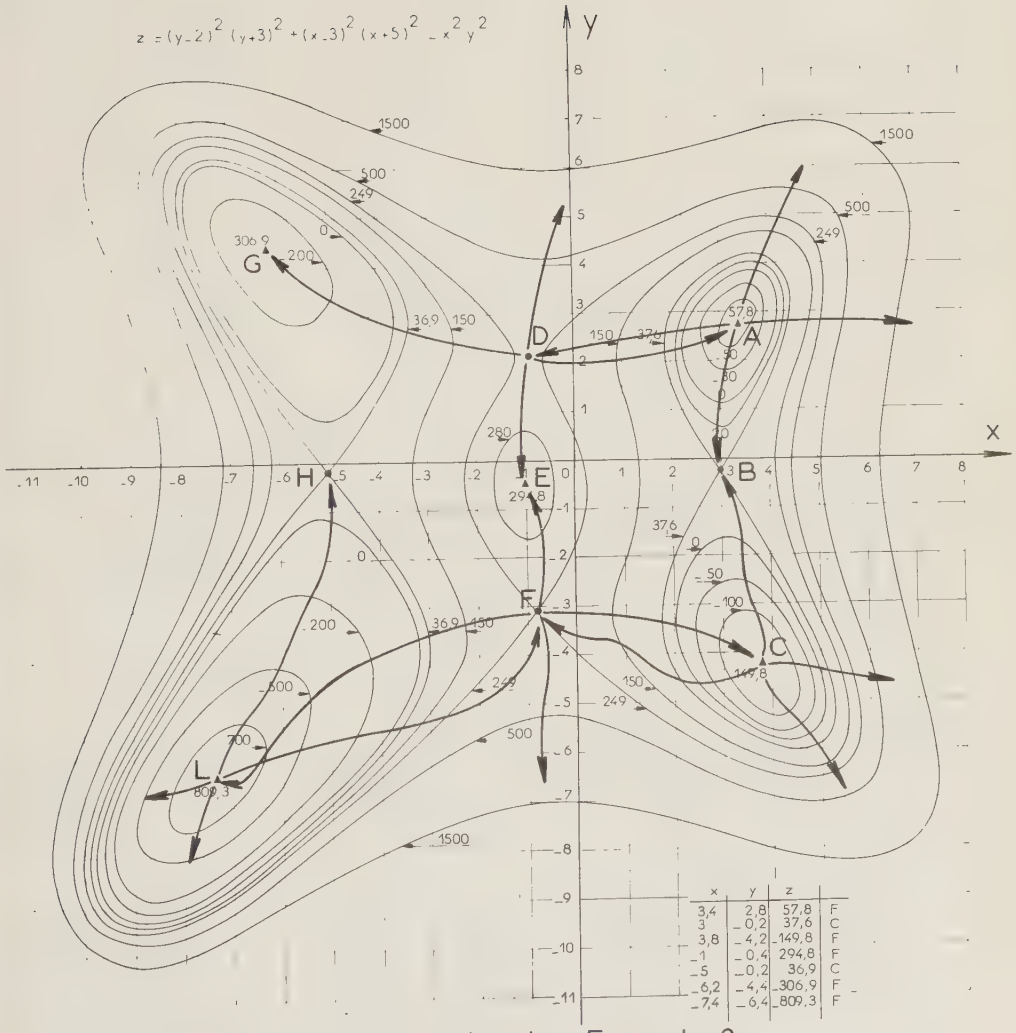
Pour contrôler les résultats de recherche, la valeur de z a été calculée dans un domaine + 9 ; + 9 avec une définition (0, 2 ; 0,2). On connaît donc approximativement l'emplacement des points stationnaires ainsi que leur nature (figure 9). L'application de la méthode des lignes invariantes confirme les prévisions. Neuf points stationnaires sont trouvés.

POINT	x	y	z
A	3,4	2,8	57,8
B	3	-0,2	37,6
C	3,8	-4,2	-149,8
D	-0,8826	2,0619	251
E	-0,9933	-0,4634	294,8
F	-0,7719	-3,0702	249
G	-6,2	-4,4	-306,9
H	-5	-0,2	36,9
L	-7,4	-6,4	-809,3

Le terme croisé ($-x^2 y^2$) a détruit la symétrie, et a fait glisser les points stationnaires vers la gauche. Les trajectoires de recherche montrent que :

1°) les points sont toujours atteints par des directions orthogonales aux equi-z

2°) Il n'y a que des noeuds et des cols.



x	y	z	
3,4	2,8	57,8	F
3	-0,2	37,6	C
3,8	-4,2	-149,8	F
-1	-0,4	294,8	F
-5	-0,2	36,9	C
-6,2	-4,4	-306,9	F
-7,4	-6,4	-809,3	F

_ Figure 9 _ Trajectoires de recherche. Exemple. 2
Sans contrainte.

Le minimum absolu se trouve au point L.

Dans le cas "contraint" les points stationnaires trouvés sont (figure 10).

POINT	x	y	z
M	3, 1	2, 7	-52
N	2, 6	-0, 4	47
O	2, 1	-2, 7	16
P	-0, 3	-7	1580
Q	-2, 2	-2, 8	194
R	-2, 4	-1	227
S	-3, 2	+3	684

Le minimum absolu correspond au point M.

Pour toutes les recherches précédentes, le temps da calcul, sur IBM 7094, se situe aux environs de deux minutes.

4-3 - Un essai de comparaison

Une comparaison objective n'est pas possible, puisqu'il n'existe pas d'autres méthodes systématiques de recherche multiextrémale. On recherche donc à créer des conditions de comparaison aussi objectives que possibles.

Tout d'abord on se propose le choix d'une méthode de recherche locale. Nous avons pris la méthode de Davidon, s'appuyant sur les propriétés des gradients conjugués, et réputée la meilleure pour les fonctions quadratiques [12] . Pour la recherche unidimensionnelle, nous avons utilisé la méthode de l'extrapolation cubique [13] . Ensuite, nous avons cherché à déterminer le nombre N_o de conditions initiales nécessaires pour que :

1°) la méthode de Davidon consiste à trouver tous les minima

2°) le temps de recherche soit approximativement égal à celui de notre méthode

Pour les cas sans contrainte, les résultats pour les deux fonctions exemples sont tous $N_o = 9$. Les trajectoires de recherche sont indiquées

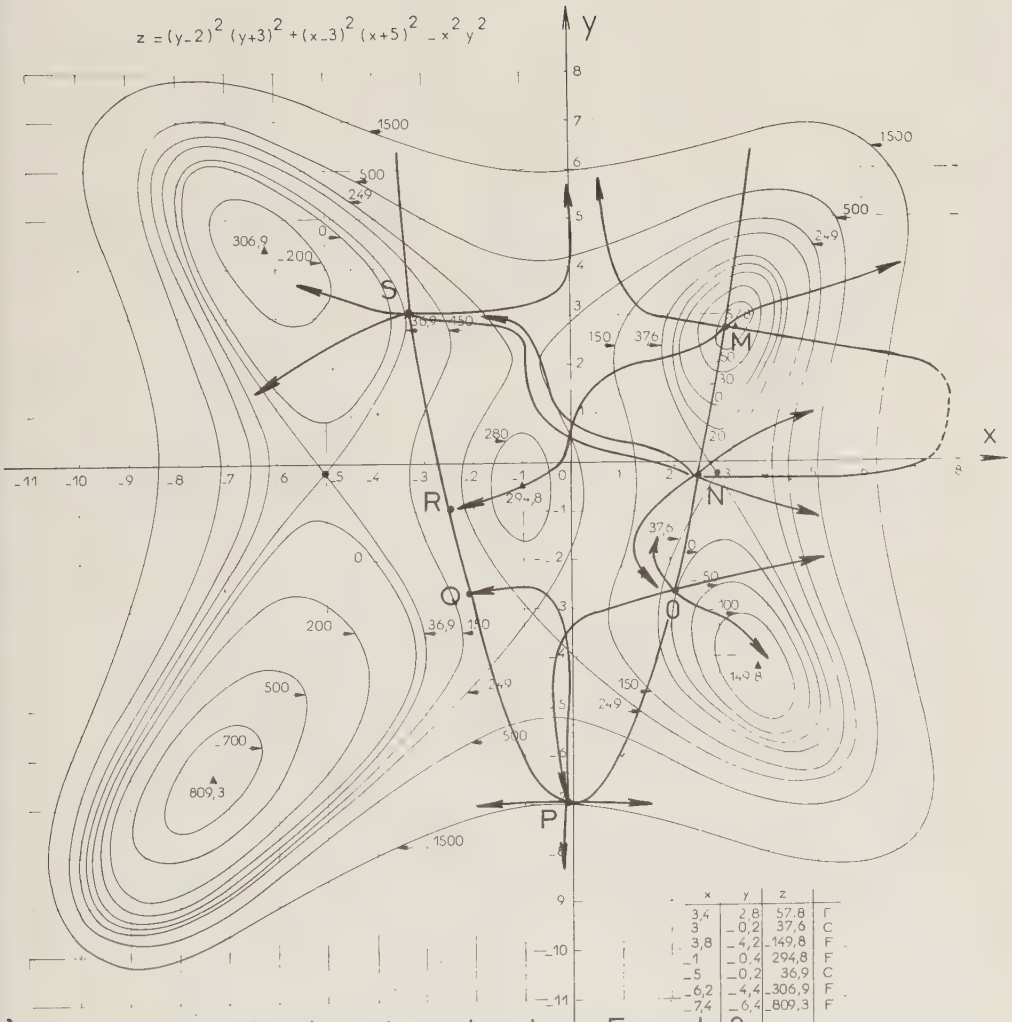
figures 11 et 12. On peut noter que dans les deux cas, à partir de la condition initiale [2] (5, 0) le minimum A est atteint par une descente zigzgante le long de l'arête x = 3.

Dans le cas avec contrainte, nous avons utilisé une combinaison [36] Davidon plus gradient projeté. Les calculs sont tellement longs que 15 minutes de IBM 7094 sont insuffisantes pour aboutir à un seul minimum, quelle que soit la condition initiale utilisée.

5 - CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons montré le principe d'une méthode systématique de recherche pour des fonctions à deux variables ayant plusieurs extrémums. Les exemples traités montrent que la méthode fonctionne parfaitement pour les types de fonctions utilisées, avec ou sans termes croisés, et également, avec ou sans contrainte d'égalité.

Le principe de la méthode est évidemment extensible aux fonctions à m variables, avec m > 2. Dans l'espace à m dimensions, les points doubles du type col vont être définis par la notion de col généralisée. En effet, soient S_1, S_2.....S_m les multiplicateurs associés à un col généralisé. La notion d'un col exige d'abord que l'un des multiplicateurs, par exemple S_1, soit de module inférieur à l'unité, ensuite, elle exige que l'un des (m-1) multiplicateurs restants soit de module supérieur à un. On aura donc m-1 catégories de col. Chacun de ces cols sera relié à un point stationnaire stable par une ligne invariante La méthode systématique consiste donc en s'inspirant de la méthode pour les fonctions à deux variables à prospecter tous les points stationnaires stables et toutes les directions des cols. Le problème consiste surtout à développer programme de recherche de points doubles ou cycles adapté aux récurrences du m ième ordre, avec m > 2. Un tel problème sort du cadre de notre travail



x	y	z	
3,4	2,8	57,8	Γ
3	−0,2	37,6	C
3,8	−4,2	−149,8	F
−1	−0,4	294,8	F
−5	−0,2	36,9	C
−6,2	−4,4	−306,9	F
−7,4	−6,4	−809,3	F

Figure. 10 – Trajectoires de recherche . Exemple. 2
Avec contrainte.

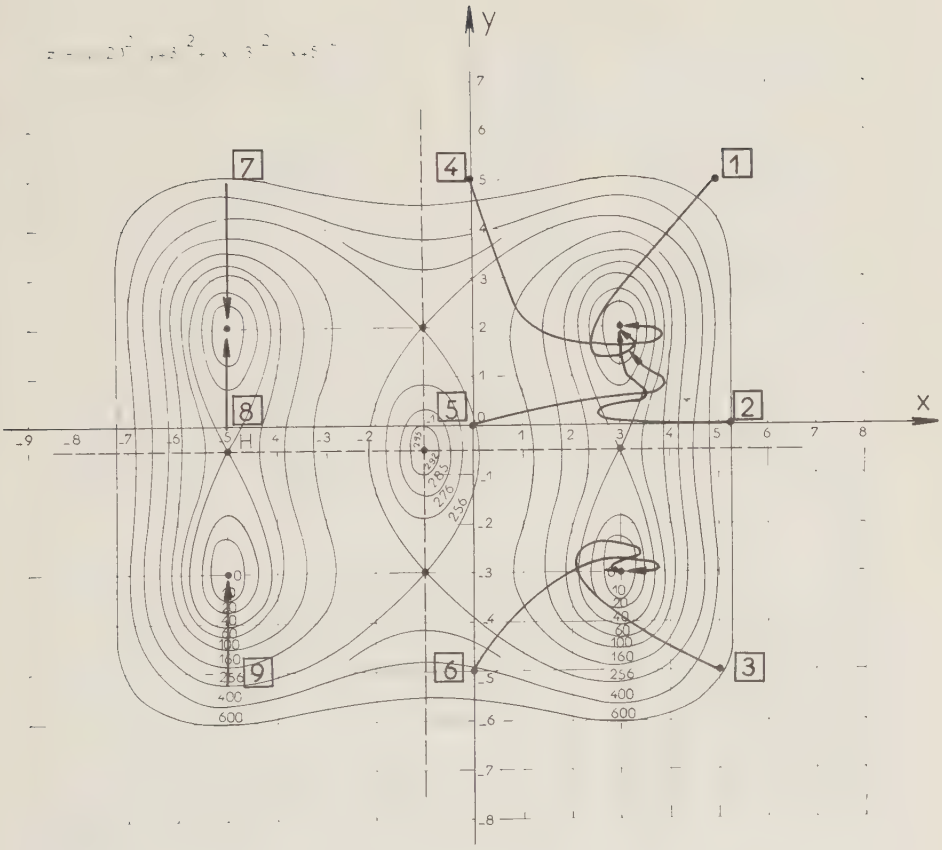
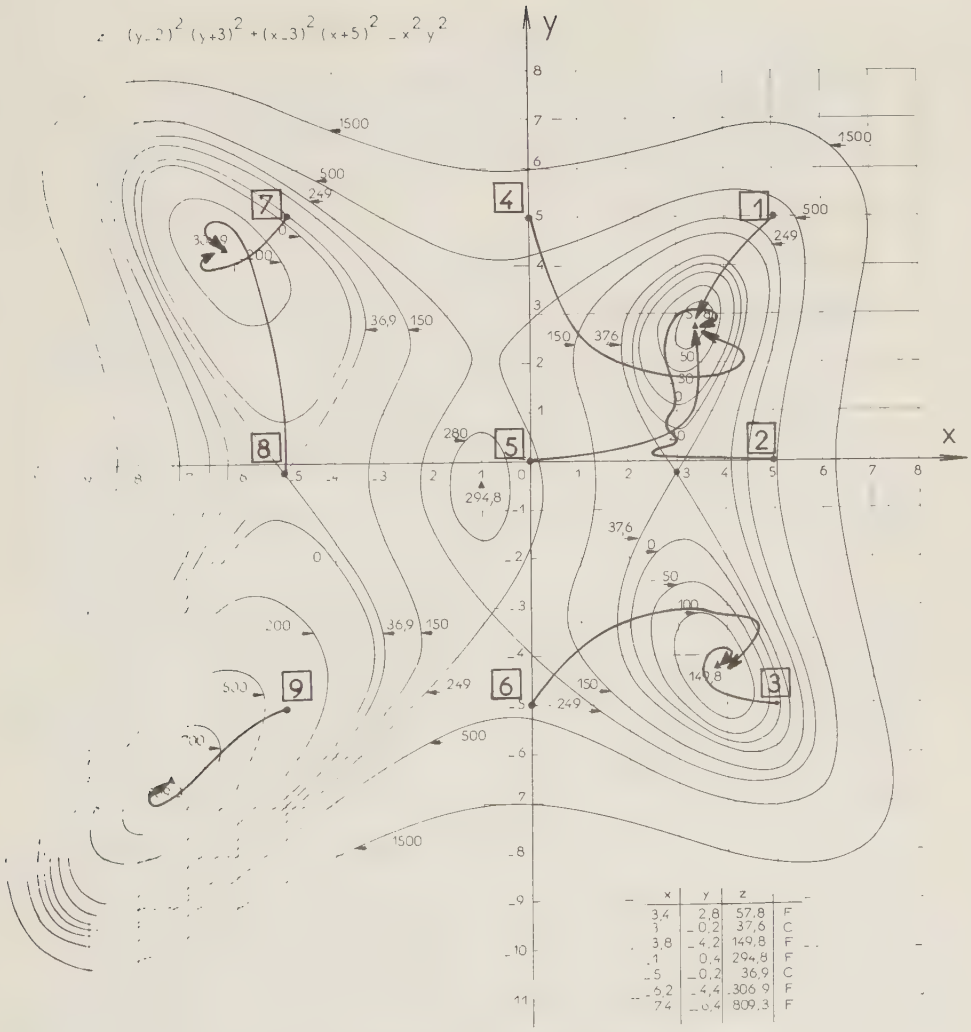


Figure.11 : Méthode de Davidon Exemple 1



x	y	z	
3,4	2,8	57,8	F
1	-0,2	37,6	C
3,8	-4,2	149,8	F
,1	0,4	294,8	F
-,5	-0,2	36,9	C
-5,2	-4,4	306,9	F
-7,4	-6,4	809,3	F

- Figure 12 - Méthode de Davidon - Exemple 2

CHAPITRE 2

STABILITE D'UN POINT DOUBLE D'UNE RECURRENCE D'ORDRE QUELCONQUE DANS UN CAS CRITIQUE AVEC DEUX MULTIPLICATEURS COMPLEXES CONJUGUES DE MODULE UNITE

1 - Introduction

2 - Résultats théoriques dans le cas général de récurrence d'ordre m quelconque, m > 2.

- 2-1 - Enoncé du problème
- 2-2 - Résolution du cas particulier
- 2-3 - Cas général

3 - Détermination des nouveaux coefficients dans le cas de récurrences du troisième ordre

- 3-1 - Transformation de z_{n+1}
- 3-2 - Etablissement de l'expression G_1
- 3-3 - Cas où l'expression de G_1 est nulle

4 - Cas d'une récurrence du 4ème ordre

- 4-1 - Transformation
- 4-2 - Expression de G_1

5 - Application : Une récurrence d'ordre 3

- 5-1 - Prévision théorique
- 5-2 - Vérification numérique

Annexe 2 A - Calculs relatifs aux nouveaux coefficients de la récurrence du troisième ordre

Annexe 2 B - Calcul des termes de ΔV dans la détermination de G_1

1 - INTRODUCTION

Le but de cette étude est la recherche de la stabilité d'un point double d'une récurrence d'ordre quelconque, dans un cas critique, caractérisé par deux multiplicateurs complexes conjugués, de module égal à l'unité, les autres ayant un module inférieur à un. Une telle récurrence, (que nous supposons autonome), à variables réelles est du type :

$$\underline{V}_{n+1} = f(\underline{V}_n) \tag{1}$$

$\underline{V}_n = (x, y, z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(q)})$ d'ordre $m = q + 2$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \gamma^{(q)}$ les coordonnées d'un point d'équilibre. Supposons que $f(\underline{V}_n)$ soit telle que, en ramenant l'origine en ce point double, il est possible d'écrire la récurrence transformée sous la forme :

$$\underline{V}^*_{n+1} = A\, V^*_n + \underline{V}(\underline{v}_n) \tag{2}$$

A étant une matrice carrée m x m, et $\underline{V}(\underline{v}_n)$ un vecteur de polynômes dont les termes sont de degré non inférieur à deux. Pour des conditions initiales prises dans un domaine suffisamment petit entourant le point double $(\alpha, \beta, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \gamma^{(q)})$ le comportement de la solution est donné par la récurrence linéaire

$$\underline{V}^*_{n+1} = A\, \underline{V}^*_n \tag{3}$$

En particulier, le point doubleest stable si ses multiplicateurs $S_1, S_2, \ldots, S_m$ solutions de l'équation caractéristique

$$D(S) = A - S\bar{I} = 0 \tag{4}$$

sont inférieurs à l'unité en module, instable si au moins un des multiplicateurs est supérieur à un, en module. Cependant, si au moins un des multiplicateurs est égal à l'unité en module, les autres en module étant < 1, la stabilité du point double ne peut pas être déduite de l'approximation linéaire. Nous sommes alors en présence d'un cas critique, au sens où l'entend Ljapunov dans

le cas d'un système d'équations différentielles [37] . Le cas critique que nous étudions ici est caractérisé par les points suivants :

1°) les multiplicateurs S_1 et S_2 associés à deux des variables sont complexes conjugués et sont de module 1 :

$$S_1 = e^{j\varphi} \qquad S_2 = e^{-j\varphi}$$

2°) les autres multiplicateurs sont réels ou complexes conjugués, mais de module toujours inférieur à un.

Nous montrerons qu'il est possible d'établir la stabilité du point double de la récurrence en nous basant sur le signe d'une expression G_i ne contenant qu'un nombre limité de coefficients des termes de degré supérieur ou égal à 2 de $V(\underline{y}_n)$. Tout d'abord, les résultats théoriques généraux sont exposés au paragraphe suivant. Ensuite, les développements détaillés dans le cas d'une récurrence du troisième ordre sont donnés pour le calcul numérique des nouveaux coefficients, en vue d'une application ultérieure. Puis, dans le cas d'une récurrence d'ordre 4 nous développerons certains calculs à titre d'exemple. Enfin, nous donnerons un exemple d'application numérique. Deux autres applications sont données au chapitre suivant.

2 - RESULTATS THEORIQUES DANS LE CAS GENERAL DE RECURRENCE D'ORDRE m QUELCONQUE, m > 2

2-1 - Enoncé du problème [3]

Soit la récurrence réelle, à variables réelles, décrivant le comportement d'un système à données échantillonnées, et possédant un point double à l'origine 0 des axes de coordonnées, avec deux des multiplicateurs égaux à

$$e^{\pm j\varphi} \quad (\varphi \neq 0,\ \varphi \neq \pi \ ,\ j = \sqrt{-1})$$

Cette récurrence, après un changement de variables [16] (linéaire) se ramène à la forme :

$$x_{n+1} = e^{j\varphi} x_n + X(x_n, y_n, z_n^{(1)}, \dots, z_n^{(q)})$$

$$y_{n+1} = e^{-j\varphi} y_n + Y(x_n, y_n, z_n^{(1)}, \dots, z_n^{(q)}) \qquad (4)$$

$$z_{n+1}^{(s)} = p_{s1} z_n^{(1)} + \dots + p_{sq} z_n^{(q)} + \alpha_s x_n + \beta_s y_n + Z_s(x_n, y_n, z_n^{(1)}, \dots, z_n^{(q)})$$

Dans (4), $S=1,\cdots,q$; $q=m-2$, les indices n sont des entiers non négatifs, les fonctions X, Y, Z_S sont supposées être des fonctions analytiques des variables complexes conjuguées x, y et des variables réelles $z^{(s)}$ dont les développements commencent avec des termes de degré non inférieur au deuxième, les p_{si} sont réels. En outre, l'hypothèse, que les multiplicateurs de O, différents de $e^{\pm j\varphi}$, sont en module inférieurs à un, est faite. Il est alors impossible de conclure à la stabilité de O à partir de l'approximation linéaire de (4) (cas critique). Ici nous allons définir les conditions pour lesquelles la suite des points $M_n(x_n, y_n, z_n^{(1)}, \cdots, z_n^{(q)})$ générés par (4) tend, pour $n \to \infty$, vers le point double O (condition de stabilité asymptotique au sens de Ljapunov), le point initial M_0 (n = o) étant supposé pris dans un voisinage suffisamment petit de O. En suivant une voie semblable à celle qui a été adoptée pour les équations différentielles [37] , le problème posé est d'abord résolu dans un cas particulier, qui le ramène à l'étude de la stabilité du point double O d'une récurrence du deuxième ordre [17, 18, 19] Il est montré ensuite que dans le cas général, un changement de variable permet toujours d'obtenir la forme du cas particulier.

Simplifions les équations en $z_{n+1}^{(s)}$ dans (4). Désignons par $\lambda_1,\cdots,\lambda_s,\cdots,\lambda_q$, les multiplicateurs, autres que $e^{\pm j\varphi}$; ces λ sont racines de

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \cdots & p_{1q} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \cdots & p_{2q} \\ \vdots & & & \\ p_{q}\,\lambda_1 & & & p_{qq}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(4a)}$$

Les λ_s sont par hypothèse de module inférieur à un.
Si $\lambda_s \neq 0$, $s=1,\cdots,q$; $\lambda_i \neq \lambda_j$; $i \neq j$, nous pouvons toujours diagonaliser la matrice

$$\Pi = \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1q} \\ \vdots & & \\ p_{s1} & \cdots & p_{sq} \\ \vdots & & \\ p_{q1} & \cdots & p_{qq} \end{vmatrix}$$

transformer les variables $z^{(s)}$ en conséquence, et écrire (4) sous la forme suivante :

$$x_{n+1} = x_n e^{j\varphi} + X(x_n, y_n, z_n^{(1)}, \dots, z_n^{(q)})$$

(4b)

$$y_{n+1} = y_n e^{-j\varphi} + Y(x_n, y_n, z_n^{(1)}, \dots, z_n^{(q)})$$

$$z_{n+1}^{(s)} = \lambda_s z_n^{(s)} + \alpha_s x_n + \beta_s y_n + Z_s(x_n, y_n, z_n^{(1)}, \dots, z_n^{(q)})$$

$$s = 1, \dots, q \quad ; \quad q = m-2.$$

Soient :

$$X^\circ(x,y) = X(x, y, 0, 0, \dots, 0)$$

$$Y^\circ(x,y) = Y(x, y, 0, \dots, 0)$$

$$Z_s^\circ(x,y) = Z_s(x, y, 0, \dots, 0)$$

et la récurrence du deuxième ordre :

$$x_{n+1} = x_n e^{j\varphi} + X^\circ(x_n, y_n)$$

(5)

$$y_{n+1} = y_n e^{-j\varphi} + Y^\circ(x_n, y_n)$$

L'hypothèse supplémentaire suivante est formulée : le problème de la stabilité du point double O de (5) est résolu avec un nombre fini de termes du développement de X°, Y° (les coefficients G_ℓ de [16, 17] ne sont pas tous nuls). On appelle alors $2l+1$, le degré le plus élevé des termes des développements de X°, Y° qui fixent la stabilité de O.

2-2 - Résolution du cas particulier

Pour ce cas, les conditions suivantes sont supposées satisfaites : les coefficients α_s, β_s de (4) sont nuls ; les développements des fonctions

z_s^0 commencent avec des termes de degré non inférieur à (21 + 1). Comme ce cas se ramène à l'étude d'une récurrence du deuxième ordre, nous rappelons quelques résultats déjà connus [16, 17, 27].

Ecrivons (5) sous la forme :

$$x_{n+1} = x_n e^{j\varphi} + \sum_{m=2}^{\infty} P_m (x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n e^{-j\varphi} + \sum_{m=2}^{\infty} Q_m (x_n, y_n)$$

avec, comme premiers polynômes P_m et Q_m :

$$P_2 (x_n, y_n) = a x_n^2 + b x_n y_n + c y_n^2$$

$$Q_2 (x_n, y_n) = \bar{c} x_n^2 + \bar{b} x_n y_n + \bar{a} y_n^2$$

$$P_3 (x_n, y_n) = \alpha x_n^3 + \beta x_n^2 y_n + \gamma x_n y_n^2 + \delta y_n^3$$

$$Q_3 (x_n, y_n) = \bar{\delta} x_n^3 + \bar{\gamma} x_n^2 y_n + \bar{\beta} x_n y_n^2 + \bar{\alpha} y_n^3 .$$

les coefficients $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$ étant respectivement conjugués des coefficients a, b, c, α, β, γ, δ. Considérons une fonction de Ljapunov de la forme :

$$V_n = x_n y_n + f_3 (x_n, y_n) + f_4 (x_n, y_n) + \ldots$$

avec :

$$f_3 (x, y) = a_{13} x^3 + a_{23} x^2 y + a_{33} x y^2 + a_{43} y^3$$

$$f_4 (x, y) = a_{14} x^4 + a_{24} x^3 y + a_{34} x^2 y^2 + a_{44} x y^3 + a_{54} y^4$$

et une expression de la forme :

(5a)
$$G_1 = 3 (a_{13} c e^{2j\varphi} + a_{43} \bar{c} e^{-2j\varphi}) + 2 (a_{23} b + a_{33} \bar{b}) + (a_{33} a e^{-2j\varphi} + a_{23} \bar{a} e^{-2j\varphi}) + (\beta e^{-j\varphi} + \bar{\beta} e^{j\varphi}) + (a \bar{a} + b \bar{b} + c \bar{c})$$

qui peut aussi s'écrire

$$(5b)\quad G_1 = a\,b\left[\frac{2e^{-j\varphi}}{1-e^{j\varphi}} + \frac{e^{-3j\varphi}}{1-e^{-j\varphi}}\right] + \left[\bar{a}\,\bar{b}\,\frac{2e^{j\varphi}}{1-e^{-j\varphi}} + \frac{e^{3j\varphi}}{1-e^{j\varphi}}\right] +$$

$$+\left(\beta e^{-j\varphi} + \bar{\beta} e^{j\varphi}\right) - b\bar{b} - 2c\bar{c}\,.$$

ou encore sous la forme :

$$G_1 = \left[\frac{\cos 3\varphi - 3\cos 2\varphi + 2\cos\varphi}{1-\cos\varphi}\right] R_e(ab) + \left[\frac{\sin 3\varphi - 3\sin 2\varphi + 2\sin\varphi}{1-\cos\varphi}\right]$$

(5c)

$$.\,\mathfrak{I}_m(ab) - R_e^2(b) - \mathfrak{I}_m^2(b) - 2R_e^2(c) - 2\mathfrak{I}_m^2(c)$$

$$+ 2\cos\varphi\,.\,R_e(\beta) + 2\sin\varphi\,.\,\mathfrak{I}_m(\beta)\,.$$

expression dans laquelle $R_e(z)$ et $\mathfrak{I}_m(z)$ signifient respectivement "Partie réelle" et "Partie imaginaire" du nombre complexe z.

Il a été montré successivement que [27]

1°) à l'exception des cas où l'on a $\varphi = 2\pi k/3$ et $\varphi = k\frac{\pi}{2}$ (k entier quelconque), on peut calculer les coefficients a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43} par les formules suivantes :

$$a_{13} = \frac{\bar{c}\,e^{j\varphi}}{1-e^{3j\varphi}} \qquad a_{23} = \frac{a e^{-j\varphi} + b e^{j\varphi}}{1-e^{j\varphi}}$$

$$a_{33} = \frac{a e^{j\varphi} + b e^{-j\varphi}}{1-e^{-j\varphi}} \qquad a_{43} = \frac{c\,e^{-j\varphi}}{1-e^{-3j\varphi}}$$

2°) l'on peut conclure

- à la stabilité asymptotique du point double O si $G_1 < 0$
- - à l'instabilité de ce point si $G_1 > 0$

3°) Dans le cas particulier où $G_1 = 0$, on doit procéder d'une façon similaire à déterminer une expression non nulle G_l, $l = 2, 3, 4\ldots$, toujours fonction des coefficients des polynômes P_m et Q_m, pour étudier la stabilité du cas critique.

Dans le cas particulier qui nous intéresse et dont les hypothèses ont été énoncées plus haut, le problème de la stabilité du point O pour la récurrence (3) d'ordre m est résolu en cherchant la stabilité du point double O de la récurrence (5) du deuxième ordre. La démonstration de ce résultat se fait en considérant la fonction

$$(6)\quad V(x, y, z^{(1)}, \ldots, z^{(q)}) = G_e\left[xy + f_3(x,y) + f_4(x,y) + \ldots + f_{2e+2}(x,y)\right] + W(z^{(1)}, \ldots, z^{(q)}) + F_3(x, y, z^{(1)}, \ldots, z^{(q)}) + F_4(x, y, z^{(1)}, \ldots, z^{(q)}) + \ldots + F_{2e+2}(x, y, z^{(1)}, \ldots, z^{(q)})$$

où les $f_i(x, y)$ sont des polynômes de degré i des variables x, y, les $F_k(x, y, z^{(1)}, \ldots, z^{(q)})$ sont des polynômes de degré k dont les termes ont en facteur l'une des variables $z^{(s)}$ portée à une puissance pouvant varier de 1 à k, G_1 est l'expression dont le signe fixe la stabilité du point double O pour la récurrence (5) (voir [16, 17]), W est une forme quadratique des variables $z^{(1)}, \ldots, z^{(q)}$, vérifiant

$$(7)\quad W(z_{n+1}^{(s)} - z_s) - W(z_n^{(s)}) = z_n^{(1)2} + z_n^{(2)2} + \ldots + z_n^{(q)2}$$

Considérons par exemple le cas de deux variables z l'expression de W est :

$$W(z^{(1)}, z^{(2)}) = A_1 z^{(1)2} + A_2 z^{(2)2} + B_1 z^{(1)} z^{(2)}$$

Cette dernière vérifiant (7), nous avons : (voir 4b)

$$A_1\lambda_1^2 z_n^{(1)2} + A_2\lambda_2^2 z_n^{(2)2} + B_1\lambda_1\lambda_2 z^{(1)} z^{(2)} - A_1 z^{(1)2} - A_2 z^{(2)2} - B_1 z^{(1)} z^{(2)} = z^{(1)2} + z^{(2)2}$$

Cette condition peut être satisfaite si nous prenons comme coefficients

$$B_1 = 0 \quad ; \quad A_1 = \frac{1}{\lambda_1^2 - 1} \quad ; \quad A_2 = \frac{1}{\lambda_2^2 - 1}$$

de sorte que nous ayons ;

$$W = \frac{\zeta^{(1)2}}{\lambda_1^2 - 1} + \frac{\zeta^{(1)2}}{\lambda_2^2 - 1}$$

Or, parhypothèse nous avons admis des multiplicateurs λ_s , $s = 1, \cdots, q$ de module inférieur à 1. La fonction W est donc définie négative.

Pour effectuer la démonstration, nous formons $\Delta V = V_{n+1} - V_n$ Les coefficients dans les fonctions f_i et F_k peuvent être choisis de façon unique pour que ΔV prenne la forme

$$(8) \quad \Delta V = G_\ell^2 (x_n y_n)^{2\ell} + \zeta_n^{(1)2} + \cdots + \zeta_n^{(q)2} + \cdots$$

les pointillés correspondant à des termes de degré supérieur à $2l + 2$, ceci à condition que, lorsque φ est commensurable avec 2π , cet angle ne donne pas lieu à un cas d'exception (voir relations (4) de [18] et relations (3) de [19] La signification des cas d'exception se voit dans les formules de calcul des coefficients a_{13} , a_{23} , a_{33}, a_{43}, coefficients nécessaires à l'élaboration de G_ℓ . En effet, si $\varphi = 2k\pi/3$ ou si $\varphi = k\frac{\pi}{2}$, deux de ces coefficients prennent une valeur infinie, de ce fait, la détermination de la stabilité devient impossible.

Si $G_\ell > 0$, V est une fonction à signe variable, si $G_\ell < 0$ pour des points M_n suffisamment voisins de O, V est définie négative, ΔV restant définie positive. A partir de (6) et (8), l'extension des théorèmes de Ljapunov aux récurrences [59, 60] permet de dire que si $G_\ell < 0$ le point double O de (3) est asymptotiquement stable pour des conditions initiales suffisamment voisines de O et si $G_\ell > 0$, ce point est instable. Par conséquent, la stabilité de O pour (3) est fixée par la stabilité du point double O de la récurrence du second ordre (5), en dehors des cas d'exception de (5). Une autre démonstration de ce résultat consisterait à remarquer que, pour des conditions initiales suffisamment voisines de O, les variables $\zeta^{(s)}$ ($s = 1, \cdots, q$) tendent vers zéro pour $n \to \infty$, si les hypothèses du cas particulier traité ici sont vérifiées, et à utiliser la transformation de Cigala [17 - 61] pour les variables x, y.

2-3 - Cas général

Les hypothèses du cas particulier précédent ne sont plus satisfaites. Il est cependant possible par un changement de variables $\zeta^{(s)} = \xi^{(s)} + v^{(s)}(x,y)$ de ramener (3) à une forme qui vérifie les conditions du cas précédent.

Soit $\mathcal{I}_s^{(o)}$ le second membre des récurrences en ξ pour

$$\xi^{(1)} = \cdots = \xi^{(q)} = 0$$

(9)
$$\mathcal{I}_s^{(o)} = p_{s1} v^{(1)}(x_n, y_n) + \cdots + p_{sq} v^{(q)}(x_n, y_n) + \alpha_s x_n + \beta_s y_n$$
$$- v^{(s)}(x_{n+1}, y_{n+1}) + \mathcal{I}_s(x, y, v^{(1)}, \cdots, v^{(q)}) .$$

et $v^{(s)}(x_n, y_n) = v_1^{(s)}(x_n, y_n) + v_2^{(s)}(x_n, y_n) + \cdots ,$

$v_k^{(s)}(x_n, y_n)$ étant un polynôme du k ième degré des variables x_n, y_n.

Les termes du premier degré de $v^{(s)}$ sont choisis tels que :

(10) $$p_{s1} v_1^{(s)} + \cdots + p_{sq} v_1^{(q)} + \alpha_s x_n + \beta_s y_n - v_1^{(s)}(e^{j\varphi} x_n, e^{-j\varphi} y_n) = 0$$

et les termes de degré k de $v^{(s)}$ tels que :

(11) $$p_{s1} v_k^{(s)} + \cdots + p_{sq} v_k^{(q)} - v_k^{(s)}(e^{j\varphi} x_n, e^{-j\varphi} y_n) = w_k^{(s)}(x_n, y_n)$$

$w_k^{(s)}$ étant une forme du k ième degré qui dépend uniquement des $v_i^{(s)}$, $i < k$.

Soit alors :

$$v_k^{(s)} = \sum_{\gamma+\delta=k} b_{\gamma\delta}^{(s)} x^{(\gamma)} y^{(\delta)}, \quad w_k^{(s)} = \sum_{\gamma+\delta=k} c_{\gamma\delta}^{(s)} x^{\gamma} y^{\delta}$$

les $c_{\gamma\delta}^{(s)}$ étant connus, les $b_{\gamma\delta}^{(s)}$ étant les coefficients à déterminer. Une identification dans (11) des termes de même forme conduit alors à la

détermination des $b^{(s)}_{\gamma\delta}$, en résolvant le système linéaire

$$(12)' \quad p_{s1}\, b^{(s)}_{\gamma\delta} + \cdots + \left[p_{ss} - e^{j\varphi(\gamma-\delta)}\right] b^{(s)}_{\gamma\delta} + \cdots + p_{sq}\, b^{(q)}_{\gamma\delta} = c^{(s)}_{\gamma\delta}$$

$$s = 1, 2, \ldots, q \; ; \; \gamma + \delta = k \; ; \; k = 1, 2, \ldots, 2\ell.$$

Le changement de variable est possible si le déterminant des coefficients $b^{(s)}_{\gamma\delta}$ est non nul. Cette condition est toujours vérifiée puisque les λ_s ont été supposés de module inférieur à l'unité.

En effet, (12) représente un système d'équations linéaires en $b^{(s)}_{\gamma\delta}$ dont les solutions sont :

$$b^{(s)}_{\gamma\delta} = \frac{\Delta^{(s)}}{\Delta}$$

où Δ est le déterminant des coefficients de $b^{(s)}_{\gamma\delta}$ du côté gauche de (12)', et $\Delta^{(s)}$ les déterminants relatifs à chaque $b^{(s)}_{\gamma\delta}$. On sait que la résolution des $b^{(s)}_{\gamma\delta}$ n'est possible que si Δ ne s'annule pas. Or, les racines λ sont solutions de (4a), et puisqu'elles sont inférieures à l'unité en module par hypothèse et que d'autre part, le module de $e^{j\varphi(\gamma-\delta)}$ est égal à un, $\Delta \neq 0$ Il existe toujours une solution en $b^{(s)}_{\gamma\delta}$.

3 - DETERMINATION DES NOUVEAUX COEFFICIENTS DANS LE CAS DE RECURRENCES DU TROISIEME ORDRE

Par suite de la transformation $\zeta^{(s)} = \xi^{(s)} + v^{(s)}(x,y)$, les coefficients des polynômes $P_n(x,y)$ et $Q_m(x,y)$ $m \geq 2$, nécessaires à l'élaboration de l'expression de G_ℓ, vont se trouver modifiés. Nous allons calculer ces nouveaux coefficients, dans le cas de récurrences du troisième ordre, qui feront l'objet d'exemples d'application du chapitre 3.

Pour cela, considérons une récurrence du 3ème ordre ayant deux multiplicateurs complexes conjugués de module égal à l'unité : $e^{\pm j\varphi}$; cette récurrence peut se mettre sous la forme :

$$x_{n+1} = x_n e^{j\varphi} + P_2(x_n, y_n, \zeta_n) + P_3(x_n, y_n, \zeta_n) + \cdots$$

$$(12) \quad y_{n+1} = y_n e^{-j\varphi} + Q_2(x_n, y_n, \zeta_n) + Q_3(x_n, y_n, \zeta_n) + \cdots$$

$$\zeta_{n+1} = a.x_n + b.y_n + c.\zeta_n + R_2(x_n, y_n, \zeta_n) + R_3(x_n, y_n, \zeta_n) +$$

où $P_2, P_3, \ldots, Q_2, Q_3, \ldots, R_2, R_3, \ldots$, sont des polynômes de degrés 2, 3, ... dont les coefficients sont connus :

(13) $$P_2 = a_{21} x_n^2 + a_{22} x_n y_n + a_{23} y_n^2 + a_{24} x_n z_n + a_{25} y_n z_n + a_{26} z_n^2$$

(14) $$P_3 = a_{31} x_n^3 + a_{32} x_n^2 y_n + a_{33} x_n y_n^2 + a_{34} y_n^3 + z_n (a_{35} x_n^2 + a_{36} x_n y_n + a_{37} y_n^2) + z_n^2 (a_{38} x_n + a_{39} y_n) + a_{310} z_n^3$$

(15) $$Q_2 = b_{21} x_n^2 + b_{22} x_n y_n + b_{23} y_n^2 + b_{24} x_n z_n + b_{25} y_n z_n + b_{26} z_n^2$$

(16) $$Q_3 = b_{31} x_n^3 + b_{32} x_n^2 y_n + b_{33} x_n y_n^2 + b_{34} y_n^3 + z_n (b_{35} x_n^2 + b_{36} x_n y_n + b_{37} y_n^2) + z_n^2 (b_{38} x_n + b_{39} y_n) + b_{310} z_n^3$$

(17) $$R_2 = d_{21} x_n^2 + d_{22} x_n y_n + d_{23} y_n^2 + d_{24} x_n z_n + d_{25} y_n z_n + d_{26} z_n^2$$

(18) $$R_3 = d_{31} x_n^3 + d_{32} x_n^2 y_n + d_{33} x_n y_n^2 + d_{34} y_n^3 + z_n (d_{35} x_n^2 + d_{36} x_n y_n + d_{37} y_n^2) + z_n^2 (d_{38} x_n + d_{39} y_n) + d_{310} z_n^2$$

(les coefficients a et b sont complexes conjugués [27]).

3-1 - Transformation de z_{n+1}

Transformons (12) pour que les hypothèses du cas particulier définies précédemment soient vérifiées. Posons : $z = \xi + v(x,y)$ avec

$$(19)\quad v(x,y) = v_1(x,y) + v_2(x,y) + \cdots + v_{2\ell}(x,y)$$

Supposons pour le moment $G_1 \neq 0$, impliquant $l = 1$, la fonction $v(x,y)$ devient :

$$(20)\quad v = v_1 + v_2 = \psi_{11}x + \psi_{12}y + \psi_{21}x^2 + \psi_{22}xy + \psi_{23}y^2$$

où les ψ sont des coefficients indéterminés. D'après cette transformation :

$$z_n = \xi_n + v(x_n, y_n)$$

$$\xi_{n+1} = z_{n+1} - v(x_{n+1}, y_{n+1})$$

D'où l'expression de ξ_{n+1} :

$$\xi_{n+1} = a x_n + b y_n + c\left[\xi_n + v(x_n, y_n)\right] + R_2(x_n, y_n, z_n)$$

$$+ R_3(x_n, y_n, z_n) + \cdots - v(x_{n+1}, y_{n+1})$$

$$= \left\{ a x_n + b y_n + c\,\xi_n + c\left[\psi_{11}x_n + \psi_{12}y_n\right] + c\left[\psi_{21}x_n^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left.\psi_{22}x_n y_n + \psi_{23}y_n^2\right]\right\} + R_2(x_n, y_n, z_n) + R_3(x_n, y_n, z_n) + \cdots$$

(21)

$$- (\psi_{11}x_{n+1} + \psi_{12}y_{n+1} + \psi_{21}x^2_{n+1} + \psi_{22}x_{n+1}y_{n+1} + \psi_{23}y^2_{n+1})$$

$$\xi_{n+1} = \{M\} + R_2 + R_3 + \cdots - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5)$$

où l'expression M entre crochets n'a pas besoin d'autres calculs supplémentaires, tandis que R_2 , R_3 , T_1 à T_5 sont à développer (voir Annexe 2 A).

Pour déterminer les coefficients Ψ , nous reprenons l'expression de ξ_{n+1} de (21), en utilisant uniquement les termes des 1ers et 2mes degrés de M, (22), (23), (24) et (25)

(26)

$$\xi_{n+1} = (a + c\Psi_{11} - u\Psi_{11})x_n + (b + c\Psi_{12} - \frac{\Psi_{12}}{u})y_n + c\,\xi_n +$$

$$+ \left[\Psi_{21}(c - u^2) + d_{21} + \Psi_{11} d_{24} + \Psi_{11}^2 d_{26} - \Psi_{11}(a_{21} + \Psi_{11} + \Psi_{11}^2 a_{26}) - \right.$$

$$\left. - \Psi_{12}(b_{21} + \Psi_{11} b_{24} + \Psi_{11}^2 b_{26}\right] x_n^2 .$$

$$+ \left[\Psi_{22}(c-1) + d_{22} + \Psi_{11} d_{25} + \Psi_{12} d_{24} + 2\Psi_{11}\Psi_{12} d_{26} - \Psi_{11}(a_{22} + \Psi_{11} a_{25} + \right.$$

$$\left. + \Psi_{12} a_{24} + 2\Psi_{11}\Psi_{12} a_{26}) - \Psi_{12}(b_{22} + \Psi_{11} b_{25} + \Psi_{12} b_{24} + 2\Psi_{11}\Psi_{12} b_{26})\right]$$

$$x_n y_n + \left[\Psi_{23}(c - \frac{1}{u^2}) + d_{23} + \Psi_{12} d_{25} + \Psi_{12}^2 d_{26} - \Psi_{11}(a_{23} + \Psi_{12} a_{25} + \right.$$

$$\left. + \Psi_{12}^2 a_{26}) - \Psi_{12}(b_{23} + \Psi_{12} b_{25} + \Psi_{12}^2 b_{26}\right] y_n^2 +$$

$$+ \left[d_{24} + 2\Psi_{11} d_{26} - \Psi_{11}(a_{24} + 2\Psi_{11} a_{26}) - \Psi_{12}(b_{24} + 2\Psi_{11} b_{26})\right] x_n \xi_n +$$

$$+ \left[d_{25} + 2\Psi_{12} d_{26} - \Psi_{11}(a_{25} + 2\Psi_{12} a_{26}) - \Psi_{12}(b_{25} + 2\Psi_{12} b_{26})\right] y_n \xi_n +$$

$$+ \left[d_{26} - \Psi_{11} a_{26} - \Psi_{12} b_{26}\right] \xi_n^2 + T^3 + \ldots\ldots$$

Nous serons ramenés au cas particulier, c'est-à-dire nous pourrons annuler dans ξ_{n+1}, les termes en $x_n, y_n, x_n^2, y_n^2, x_n y_n$, en donnant aux coefficients Ψ les valeurs suivantes :

$$\Psi_{11} = \frac{a}{u-c} = \frac{a}{e^{j\varphi}-c}$$

$$\Psi_{12} = \frac{bu}{1-cu} = \frac{be^{j\varphi}}{1-ce^{j\varphi}}$$

$$\Psi_{21} = \frac{1}{e^{2j\varphi}-c}\left[\Psi_{11}(d_{24}-a_{21}-\Psi_{12}b_{24})+\Psi_{11}^2(d_{26}-a_{24}-\Psi_{12}b_{26})-\Psi_{11}^3 a_{26}-\Psi_{12}b_{21}+d_{21}\right]$$

$$\Psi_{22} = \frac{1}{1-c}\left[d_{22}+\Psi_{11}(d_{25}+2\Psi_{12}d_{26}-\Psi_{12}a_{24}-a_{22}-\Psi_{12}b_{25}-2\Psi_{12}^2 b_{26})+\right.$$

$$\left.+\Psi_{11}^2(-a_{25}-2\Psi_{12}a_{26})+\Psi_{12}(d_{24}-b_{22})-\Psi_{12}^2 b_{24}\right]$$

$$\Psi_{23} = \frac{e^{2j\varphi}}{1-ce^{2j\varphi}}\left[d_{23}+\Psi_{12}(d_{25}-\Psi_{11}a_{25}-b_{23})+\Psi_{12}^2(d_{26}-\Psi_{11}a_{26}-b_{25})+\right.$$

$$\left.+\Psi_{12}^3(-b_{26})-\Psi_{11}a_{23}\right]$$

Apparemment, les coefficients Ψ ne peuvent être déterminés si nous avons l'un des cas :

$$c = u = e^{j\varphi}$$

$$c = 1/u = e^{-j\varphi}$$

$$c = u^2 = e^{2j\varphi}$$

$$c = 1$$

$$c = 1/u^2 = e^{-2j\varphi}$$

En réalité, ceci ne peut jamais avoir lieu ; puisque par hypothèse, nous supposons la valeur de C réelle et de module inférieur à 1.

D'autre part, en posant

(28) $$\overline{d}_{24} = d_{24}+\Psi_{11}(2d_{26}-a_{24}-2\Psi_{11}a_{26})-\Psi_{12}(b_{24}+2b_{26}\Psi_{11})$$

$$\overline{d}_{25} = d_{25}+\Psi_{12}(2d_{26}-b_{25}-2\Psi_{12}b_{26})-\Psi_{11}(a_{25}+2\Psi_{12}a_{26})$$

$$\overline{d}_{26} = d_{26}-\Psi_{11}a_{26}-\Psi_{12}b_{26}$$

la nouvelle expression de ξ_{n+1} s'écrit :

$$\xi_{n+1} = c\,\xi_n + \bar{d}_{24}\,x_n\xi_n + \bar{d}_{25}\,y_n\xi_n + \bar{d}_{26}\,\xi_n^2 + T^3 \text{----}$$

$$\xi_{n+1} = c\,\xi_n + \bar{R}_{2\xi}(x_n, y_n, \xi_n) + \bar{R}_3(x_n, y_n, \xi_n) + \cdots$$

L'indice ξ dans $\bar{R}_{2\xi}$ rappelle que tous les termes contenus dans $\bar{R}_{2\xi}$ sont multipliés par ξ_n, impliquant $\bar{R}_{2\xi}(x_n, y_n, 0) = 0$. Après la transformation, la nouvelle récurrence s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n e^{j\varphi} + \bar{P}_2(x_n, y_n, \xi_n) + \bar{P}_3(x_n, y_n, \xi_n) + \bar{P}_4 \text{---} \\ y_{n+1} &= y_n e^{-j\varphi} + \bar{Q}_2(x_n, y_n, \xi_n) + \bar{Q}_3(x_n, y_n, \xi_n) + \bar{Q}_4 \text{----} \\ \xi_{n+1} &= c\,\xi_n + \bar{R}_{2\xi}(x_n, y_n, \xi_n) + \bar{R}_3(x_n, y_n, \xi_n) + \bar{R}_4 \text{----} \end{aligned} \tag{29}$$

3-2 - Etablissement de l'expression G_1

Le mécanisme de l'établissement de l'expression G_1 dans notre cas ici, est un peu différent de celui utilisé dans [27], malgré l'identité de la forme obtenue. Nous en montrons ici les étapes principales, permettant, en même temps, d'illustrer le principe général énoncé au paragraphe 2-2.

La fonction de Ljapunov utilisée ici est :

$$V(x,y,\xi) = G_1\left[xy + f_3(x,y) + f_4(x,y)\right] + W(\xi) + F_3(x,y,\xi) + F_4(x,y,\xi) \tag{30}$$

avec :

$$f_3(x,y) = \varphi_{31}x^3 + \varphi_{32}x^2y + \varphi_{33}xy^2 + \varphi_{34}y^3$$

$$f_4(x,y) = \varphi_{41}x^4 + \varphi_{42}x^3y + \varphi_{43}x^2y^2 + \varphi_{44}xy^3 + \varphi_{45}y^4$$

$$F_3(x,y,\xi) = \gamma_{31}\xi^3 + \gamma_{32}\xi^2x + \gamma_{33}\xi^2y + \gamma_{34}\xi x^2 + \gamma_{35}\xi xy + \gamma_{36}\xi y^2$$

$$F_4(x,y,\xi) = \gamma_{41}\xi^4 + \gamma_{42}\xi^3x + \gamma_{43}\xi^3y + \gamma_{44}\xi^2x^2 + \gamma_{45}\xi^2xy + \gamma_{46}\xi^2y^2 + \gamma_{47}\xi x^3 + \gamma_{48}\xi x^2y + \gamma_{49}\xi xy^2 + \gamma_{410}\xi y^3.$$

$$W(\xi) = A\xi^2 = \frac{1}{c^2-1}\xi^2$$

où les valeurs des coefficients φ et γ sont à choisir. Cette forme de $V(x, y, \xi)$ est choisie de sorte que nous ayons :

$$V(x,y,0) = V(x,y) = G_1 \cdot \left(xy + f_3(x,y) + f_4(x,y)\right)$$

A partir de (30), écrivons $V_n = V(x_n, y_n, \xi_n)$, $V_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}, \xi_{n+1})$ et calculons $\Delta V = V_{n+1} - V_n$

(31)
$$V_n = G_1 \cdot [x_n y_n + \varphi_{31} x_n^3 + \varphi_{32} x_n^2 y_n + \varphi_{33} x_n y_n^2 + \varphi_{34} y_n^3 + \varphi_{41} x_n^4 +$$
$$+ \varphi_{42} x_n^3 y_n + \varphi_{43} x_n^2 y_n^2 + \varphi_{44} x_n y_n^3 + \varphi_{45} y_n^4] + \frac{1}{c^2 - 1} \xi_n^2 +$$
$$+ \gamma_{31} \xi_n^3 + \gamma_{32} \xi_n^2 x_n + \gamma_{33} \xi_n^2 y_n + \gamma_{34} \xi_n x_n^2 + \gamma_{35} \xi_n x_n y_n +$$
$$+ \gamma_{36} \xi_n y_n^2 + \gamma_{41} \xi_n^4 + \gamma_{42} \xi^3 x_n + \gamma_{43} \xi_n^3 y_n + \xi_n^2 (\gamma_{44} x_n^2 + \gamma_{45} x_n y_n +$$
$$+ \gamma_{46} y_n^2) + \xi_n (\gamma_{47} x_n^3 + \gamma_{48} x_n^2 y_n + \gamma_{49} x_n y_n^2 + \gamma_{410} y_n^3)$$

$$V_{n+1} = G_1 \cdot [x_{n+1} y_{n+1} + \varphi_{31} x_{n+1}^3 + \varphi_{32} x_{n+1}^2 y_{n+1} + \varphi_{33} x_{n+1} y_{n+1}^2 + \varphi_{34} y_{n+1}^3 +$$
$$+ \varphi_{41} x_{n+1}^4 + \varphi_{42} x_{n+1}^3 y_{n+1} + \varphi_{43} x_{n+1}^2 y_{n+1}^2 + \varphi_{44} x_{n+1} y_{n+1}^3 + \varphi_{45} y_{n+1}^4] +$$

(32)
$$+ \frac{1}{c^2 - 1} \xi_{n+1}^2 + \gamma_{31} \xi_{n+1}^3 + \xi_{n+1}^2 (\gamma_{32} x_{n+1} + \gamma_{33} y_{n+1}) + \xi_{n+1} (\gamma_{34} x_{n+1}^2 +$$
$$+ \gamma_{35} x_{n+1} y_{n+1} + \gamma_{36} y_{n+1}^2) + \gamma_{41} \xi_{n+1}^4 + \xi_{n+1}^3 (\gamma_{42} x_{n+1} + \gamma_{43} y_{n+1}) +$$
$$+ \xi_{n+1}^2 (\gamma_{44} x_{n+1}^2 + \gamma_{45} x_{n+1} y_{n+1} + \gamma_{46} y_{n+1}^2) + \xi_{n+1} (\gamma_{47} x_{n+1}^3 +$$
$$+ \gamma_{48} x_{n+1}^2 y_{n+1} + \gamma_{49} x_{n+1} y_{n+1}^2 + \gamma_{410} y_{n+1}^3)$$

Ecrivons ΔV sous la forme de

$$\Delta V = \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 + \ldots\ldots$$

les indices 2, 3, 4 ... correspondant aux termes de degrés respectivement

(Voir Annexe 2 B pour le calcul de ΔV)

L'expression de ΔV_4 contient 15 monômes du quatrième degré. Les coefficients de 14 d'entre eux contiennent l'un des paramètres indéterminés φ_{41} $\varphi_{42}, \varphi_{44}, \varphi_{45}$, γ_{41} à γ_{410} . Ces coefficients sont tous de la forme $(m\,x + n)$; x étant un φ ou un γ . Nous pouvons donc les annuler en choissant systématiquement $x = -n/m$. Les dénominateurs m de ces paramètres, fonction $u = e^{j\varphi}$, de c et de 1, ne peuvent pas être nuls pour les mêmes raisons cités plus haut. Le coefficient du monôme $x_n^2\, y_n^2$ ne contient aucun des 14 paramètres précédents.

Désignons ce coefficient par G_1 :

$$(36)\quad G_1 = \bar{b}_{33} e^{j\varphi} + \bar{a}_{32} e^{-j\varphi} + \bar{b}_{21}\bar{a}_{23} + \bar{a}_{22}\bar{b}_{22} + \bar{a}_{21}\bar{b}_{23}$$
$$+ 3\varphi_{31} e^{2j\varphi}\bar{a}_{23} + \varphi_{32}(2\bar{a}_{22} + e^{2j\varphi} b_{23}) +$$
$$+ \varphi_{33}(\bar{a}_{21} e^{-2j\varphi} + 2\bar{b}_{22}) + 3 e^{-2j\varphi}\varphi_{34}\bar{b}_{21} .$$

Les expressions de V_n et de ΔV deviennent :

$$(37)\quad V_n = G_1 \cdot x_n y_n + \frac{\xi_n^2}{c^2 - 1} + T_3 + T_4 + \cdots$$

$$(38)\quad \Delta V = \xi_n^2 + G_1^2\, x_n^2\, y_n^2 + T_5 + \cdots$$

Si nous avons $G_1 > 0$, V_n est à signe variable, puisque $G_1 x_n y_n > 0$ et $\xi_n^2 / (c^2-1) < 0$; tandis que $\Delta V > 0$, puisque $G_1^2 x_n^2 y_n^2 > 0$ (x_n, y_n : complexes conjugués).

Si nous avons $G_1 < 0$, $V_n < 0$ et $\Delta V > 0$.

D'après une extension des théorèmes de Ljapunov aux récurrences nous pouvons donc conclure que :

- le point double O est stable si $G_1 < 0$
- le point double O est instable si $G_1 > 0$

Remarque : L'expression de G_1 , (36), établie ici est identique à celle, 5a, établie dans [27], la correspondance des symboles utilisés étant :

Dans (36)	Dans (5a)
$\varphi_{31}\ \varphi_{32}\ \varphi_{33}\ \varphi_{34}$	$a_{13}\ a_{23}\ a_{33}\ a_{43}$
$\overline{a}_{21}\ \overline{a}_{22}\ \overline{a}_{23}$	$a\ \ b\ \ c$
$\overline{b}_{21}\ \overline{b}_{22}\ \overline{b}_{23}$	$\overline{c}\ \ \overline{b}\ \ \overline{a}$

3-3 - Cas où l'expression de G_1 est nulle

Dans ce cas on ne peut pas conclure. Il devient alors nécessaire d'utiliser les coefficients des termes des degrés supérieurs. D'une façon générale, soit l l'indice de la première expression $G_{\ell-1}$ non nul. On s'arrangera pour annuler les termes de tous les ΔV_i, $i = \ell, \ldots, 2\ell - 1$ sauf :

$$\Delta V_\ell = G_{\ell-1}(x,y)^\ell$$

c'est le signe de $G_{\ell-1}$ qui déterminera la stabilité du point double O. Montrons, toujours dans notre cas de récurrence d'ordre 3, la marche à suivre pour l'établissement de l'expression $G_{\ell-1}$.

a) Dans la transformation

$$\xi = z - V(x,y)$$

nous prendrons :

$$V(x,y) = V_1(x,y) + V_2(x,y) + \cdots + V_{2\ell-1}(x,y)$$

de sorte que nous puissions éliminer dans ξ_{n+1} les termes en (x, y) seuls dans R_1 (x, y, z), R_2 (x, y, z) ...., $R_{2\ell-2}$ (x, y, z). L'expression de ξ_{n+1} devient alors :

$$\xi_{n+1} = c\,\xi_n + \overline{R}_{2\xi}(x,y,\xi) + \cdots + R_{(2\ell-2)\xi}(x,y,\xi) + R_{2\ell-1}(x,y,\xi) + \cdots\cdots$$

b) L'indice de l'expression G est $(\ell-1)$. Les coefficients des termes qui entrent dans le calcul du critère $G_{\ell-1}$ sont pris dans les $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ de x_{n+1} et y_{n+1} jusqu'au degré $2\ell-1$.

$$x_{n+1} = x_n e^{j\varphi} + \bar{P}_2(x,y,\xi) + \cdots + \bar{P}_{2\ell-1}(x,y,\xi) + \bar{P}_i$$

$$y_{n+1} = y_n e^{-j\varphi} + \bar{Q}_2(x,y,\xi) + \cdots + Q_{2\ell-1}(x,y,\xi) + \bar{Q}_i \cdot \quad i = 2\ell \ldots$$

c) La fonction V sera de la forme :

$$V = G_1 x y + f_3(x,y) + \cdots + f_{2\ell}(x,y) + W(\xi) + F_3(x,y,\xi) + \cdots + F_{2\ell}(x,y,\xi) \cdot$$

d) On écrira ΔV de la façon suivante :

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \cdots + \Delta V_{2\ell}.$$

e) Tous les coefficients des termes de ΔV_1 à $\Delta V_{2\ell}$ seront annulés sauf celui du terme en $(x, y)^{\ell}$:

$$\Delta V = G^2_{\ell-1} \cdot (x y)^{\ell} + \Delta V_{\ell+1} + \cdots$$

si $G_{\ell-1} < 0$, il y a stabilité.

4 - CAS D'UNE RECURRENCE DU 4è ORDRE

Soit une récurrence d'ordre 4 :

$$x_{n+1} = x_n e^{j\varphi} + P_2(x_n, y_n, \zeta^{(1)}_n, \zeta^{(2)}_n) + P_3(x_n, y_n, \zeta^{(1)}_n, \zeta^{(2)}_n) + \cdots$$

$$y_{n+1} = y_n e^{-j\varphi} + Q_2(x_n, y_n, \zeta^{(1)}_n, \zeta^{(2)}_n) + Q_3(x_n, y_n, \zeta^{(1)}_n, \zeta^{(2)}_n) + \cdots$$

$$\zeta^{(1)}_{n+1} = a_1 x_n + b_1 y_n + c_1 \zeta^{(1)}_n + d_1 \zeta^{(2)}_n + R^{(1)}_2(x_n, y_n, \zeta^{(1)}_n, \zeta^{(2)}_n) + \cdots$$

$$\zeta^{(2)}_{n+1} = a_2 x_n + b_2 y_n + c_2 \zeta^{(1)}_n + d_2 \zeta^{(2)}_n + R^{(2)}_2(x_n, y_n, \zeta^{(1)}_n, \zeta^{(2)}_n) + \cdots$$

ayant deux de ses multiplicateurs complexes conjgués de module égal à un $(e^{\pm j\varphi})$, et ses deux autres multiplicateurs réels de module inférieur à l'unité.

Nous considérerons le cas de base de $2\ell-1 = 3$, et transformerons les variables $\eta^{(1)}$ et $\eta^{(2)}$ par :

$$\eta^{(1)} = \xi^{(1)} + v^{(1)}(x,y) = \xi^{(1)} + \psi^1_{11}\,x + \psi^1_{12}\,y + \psi^1_{21}\,x^2 + \psi^1_{22}\,xy + \psi^1_{23}\,y^2$$

$$\eta^{(2)} = \xi^{(2)} + v^{(2)}(x,y) = \xi^{(2)} + \psi^2_{11}\,x + \psi^2_{12}\,y + \psi^2_{21}\,x^2 + \psi^2_{22}\,xy + \psi^2_{23}\,y^2$$

Il s'en suit que :

$$\xi^{(1)}_{n+1} = \eta^{(1)}_{n+1} - v^{(1)}(x_{n+1}, y_{n+1})$$

$$\xi^{(2)}_{n+1} = \eta^{(2)}_{n+1} - v^{(2)}(x_{n+1}, y_{n+1})$$

$$\eta^{(1)}_n = \xi^{(1)}_n + v^{(1)}(x_n, y_n)$$

$$\eta^{(2)}_n = \xi^{(2)}_n + v^{(2)}(x_n, y_n).$$

Calculons l'expression de $\xi^{(1)}_{n+1}$ en faisant disparaftre $\eta^{(1)}_{n+1}$ et $\eta^{(1)}_n$:

$$\begin{aligned}
\xi^{(1)}_{n+1} = {} & a_1 x_n + b_1 y_n + \\
& + c_1(\xi^{(1)}_n + \psi^1_{11} x_n + \psi^1_{12} y_n + \psi^1_{21} x_n^2 + \psi^1_{22} x_n y_n + \psi^1_{23} y_n^2) \\
& + d_1(\xi^{(2)}_n + \psi^2_{11} x_n + \psi^2_{12} y_n + \psi^2_{21} x_n^2 + \psi^2_{22} x_n y_n + \psi^2_{23} y_n^2) \\
& + R^{(1)}_2(x_n, y_n, \xi^{(1)}_n + v^{(1)}_n, \xi^{(2)}_n + v^{(2)}_n + R^{(1)}_3(\ldots) + \ldots \\
& - \psi^1_{11}[x_n e^{j\varphi} + P_2(x_n, y_n, \xi^{(1)}_n + v^{(1)}_n, \xi^{(2)}_n + v^{(2)}_n) + \ldots] \\
& - \psi^1_{12}[y_n e^{-j\varphi} + Q_2(x_n, y_n, \xi^{(1)}_n + v^{(1)}_n, \xi^{(2)}_n + v^{(2)}_n) + \ldots] \\
& - \psi^1_{21}[x_n e^{j\varphi} + P_2(\ldots) + \ldots]^2 \\
& - \psi^1_{22}[y_n e^{-j\varphi} + Q_2(\ldots) + \ldots][x_n e^{j\varphi} + P_2(\ldots) + \ldots] \\
& \cdot \psi^1_{23}[y_n e^{-j\varphi} + Q_2(\ldots) + \ldots]^2
\end{aligned}$$

Développons les expressions avec les Ψ^1 en facteur. Nous nous intéressons plus particulièrement aux termes en x et y des 1ers et 2èmes degrés.

$$1^\circ\ \Psi^1_{11}(x_n u + P_2) = \Psi^1_{11}\Big[x_n u + a_{21}x_n^2 + a_{22}x_n y_n + a_{23}y_n^2 +$$

$$+ z_n^{(1)}(a_{24}x_n + a_{25}y_n + a_{26}z_n^{(2)} + a_{27}z_n^{(1)}) +$$

$$+ z_n^{(2)}(a_{28}x_n + a_{29}y_n + a_{210}z_n^{(1)} + a_{211}z_n^{(2)})\Big]$$

$$= \Psi^1_{11}\Big[x_n u + a_{21}x_n^2 + a_{22}x_n y_n + a_{23}y_n^2 +$$

$$+\big(\xi_n^{(1)} + \Psi^1_{11}x_n + \Psi^1_{12}y_n + v_2^{(1)}(x_n, y_n)\big)\big(a_{24}x_n + a_{25}y_n +$$

$$a_{26}\big(\xi_n^{(2)} + \Psi^2_{11}x_n + \Psi^2_{12}y_n + v_2^{(2)}(x_n, y_n)\big) +$$

$$a_{27}\big(\xi_n^{(1)} + \Psi^1_{11}x_n + \Psi^1_{12}y_n + v_2^{(2)}(x_n, y_n)\big)\big) +$$

$$+\big(\xi_n^{(2)} + \Psi^2_{11}x_n + \Psi^2_{12}y_n + v_2^{(2)}(x_n, y_n)\big)\big(a_{28}x_n + a_{29}y_n +$$

$$a_{210}\big(\xi_n^{(1)} + \Psi^1_{11}x_n + \Psi^1_{12}y_n + v_2^{(1)}(x_n, y_n)\big) +$$

$$a_{211}\big(\xi_n^{(2)} + \Psi^2_{11}x_n + \Psi^2_{12}y_n + v_2^{(2)}(x_n, y_n)\big)\Big]$$

$$= \Psi^1_{11}\,u x_n$$

$$+ \Psi^1_{11}\big[a_{21} + \Psi^1_{11}(a_{24} + a_{26}\Psi^2_{11} + a_{27}\Psi^1_{11}) + \Psi^2_{11}(a_{28} + \Psi^1_{11}a_{210} + \Psi^2_{11}a_{211})\big]x_n^2$$

$$+ \Psi^1_{11}\big[a_{22} + \Psi^1_{11}(a_{25} + \Psi^2_{12}a_{26} + \Psi^1_{12}a_{27}) + \Psi^1_{12}(a_{24} + \Psi^2_{11}a_{26} + \Psi^1_{11}a_{27})$$

$$+ \Psi^2_{11}(a_{29} + \Psi^1_{12}a_{210} + \Psi^2_{12}a_{211}) + \Psi^2_{12}(a_{28} + \Psi^1_{11}a_{210} + \Psi^2_{11}a_{211})\big]x_n y_n$$

$$+ \Psi^1_{11}\big[a_{23} + \Psi^1_{12}(a_{25} + \Psi^2_{12}a_{26} + \Psi^1_{12}a_{27}) + \Psi^1_{12}(a_{29} + \Psi^1_{12}a_{210} + \Psi^2_{12}a_{211})\big]y_n^2$$

$$+ T_2(x_n, y_n, \xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}) + T_3 \cdots$$

En faisant des calculs similaires, nous aboutissons à :

$$2°-\ \Psi_{12}^{(1)}\left(\frac{y_n}{u}+Q_2\right)=\Psi'_{12}\left(\frac{y_n}{u}\right)$$

$$+\Psi_{12}^{1}\left[b_{21}+\Psi'_{11}\left(b_{24}+b_{26}\Psi_{11}^{2}+b_{27}\Psi_{11}^{1}\right)+\Psi_{11}^{2}\left(b_{28}+\Psi_{11}^{1}b_{210}+\Psi_{11}^{2}b_{211}\right)\right]x_n^2$$

$$+\Psi_{12}^{1}\left[b_{22}+\Psi_{11}^{1}\left(b_{25}+\Psi_{12}^{2}b_{26}+\Psi_{12}^{1}b_{27}\right)+\Psi_{12}^{1}\left(b_{24}+\Psi_{11}^{2}b_{26}+\Psi_{11}^{1}b_{27}\right)\right.$$

$$\left.+\Psi_{11}^{2}\left(b_{29}+\Psi'_{12}b_{210}+\Psi_{12}^{2}b_{211}\right)+\Psi_{12}^{2}\left(b_{28}+\Psi_{11}^{1}b_{210}+\Psi_{11}^{2}b_{211}\right)\right]x_n y_n$$

$$+\Psi_{12}^{1}\left[b_{23}+\Psi_{12}^{1}\left(b_{25}+\Psi_{12}^{2}b_{26}\Psi_{12}^{1}b_{27}\right)+\Psi_{12}^{2}\left(b_{29}+\Psi_{12}^{1}b_{210}+\Psi_{12}^{2}b_{211}\right)\right]y_n^2$$

$$3°-\ \Psi_{21}^{1}\left[x_n u+P_2\right]^2=\Psi_{21}^{1}u^2x_n^2+T_3+\ldots..$$

$$4°-\ \Psi_{22}^{1}\left[\frac{y_n}{u}+Q_2\right]\left[x_n u+P_2\right]=\Psi_{22}^{1}x_n y_n+T_3+\ldots..$$

$$5°-\ \Psi_{23}^{1}\left[\frac{y_n}{u}+Q_2\right]^2=\Psi_{23}^{1}\,y_n^2/u^2$$

$$6°-\ R_2^{(1)}\left(x_n,y_n,\xi_n^{(1)},\xi_n^{(2)}\right)=d_{21}^{1}x_n^2+d_{22}^{1}x_n y_n+d_{23}^{1}y_n^2+$$

$$+\left(\xi_n^{1}+v_n^{1}\right)\left(d_{24}^{1}x_n+d_{25}^{1}y_n+d_{26}^{1}\left(\xi_n^{2}+v_n^{2}\right)+d_{27}\left(\xi_n^{1}+v_n^{1}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\xi_n^{2}+v_n^{2}\right)\left(d_{28}^{1}x_n+d_{29}^{1}y_n+d_{210}^{1}\left(\xi_n^{1}+v_n^{1}\right)+d_{211}^{1}\left(\xi_n^{2}+v_n^{2}\right)\right)\right)$$

En groupant les termes en x_n et y_n seuls, l'expression de ξ_{n+1}^{1} devient :

$$\xi_{n+1}^{1}=c_1\xi_n^{1}+d\,\xi_n^{2}$$

$$+\left(a_1+c_1\Psi_{11}^{1}+d_1\Psi_{11}^{2}+\Psi_{11}^{1}u\right)x_n$$

$$+\left(b_1+c_1\Psi_{12}^{1}+d_1\Psi_{12}^{2}+\Psi_{12}^{1}/u\right)y_n$$

$$+\left\{c_1\Psi_{21}^{1}+d_1\Psi_{21}^{2}+d_{21}^{1}+\Psi_{11}^{1}\left[\left(a_{21}+\Psi_{11}^{2}a_{26}+a_{27}\Psi_{11}^{1}\right)+\right.\right.$$

$$\Psi_{11}^2 (a_{28} + \Psi_{11}^1 a_{210} + \Psi_{11}^2 a_{211})]$$

$$+ \Psi_{12}^1 [b_{21} + \Psi_{11}^1 (b_{24} + b_{26} \Psi_{11}^2 + b_{27} \Psi_{11}^1)$$

$$+ \Psi_{11}^2 (b_{28} + \Psi_{11}^1 b_{210} + \Psi_{11}^2 b_{211})] + \Psi_{21}^1 u^2 \} x_n^2$$

$$+ \{c_1 \Psi_{22}^1 + d_1 \Psi_{22}^2 + d_{22}^1 + \Psi_{11}^1 [a_{22} + \Psi_{11}^1 (a_{25} + \Psi_{12}^2 a_{26} + \Psi_{12}^1 a_{27}) +$$

$$+ \Psi_{12}^1 (a_{24} + \Psi_{11}^2 a_{26} + \Psi_{11}^1 a_{27} + \Psi_{11}^2 (a_{29} + \Psi_{12}^1 a_{210} + \Psi_{12}^2 a_{211}) +$$

$$\Psi_{12}^2 (a_{28} + \Psi_{11}^1 a_{210} + \Psi_{11}^2 a_{211})] + \Psi_{12}^1 [b_{22} + \Psi_{11}^1 (b_{25} + \Psi_{12}^1 b_{26} + \Psi_{12}^1 b_{27}) +$$

$$+ \Psi_{12}^1 (b_{24} + \Psi_{11}^2 b_{26} + \Psi_{11}^1 b_{27}) + \Psi_{11}^2 (b_{29} + \Psi_{12}^1 b_{210} + \Psi_{12}^2 b_{211}) +$$

$$+ \Psi_{12}^2 (b_{28} + \Psi_{11}^1 b_{210} + \Psi_{11}^2 b_{211}] + \Psi_{22}^1 \} x_n y_n$$

$$+ \{c_1 \Psi_{23}^1 + d_1 \Psi_{23}^2 + d_{23}^1 + \Psi_{11}^1 [a_{23} + \Psi_{12}^1 (a_{25} + \Psi_{12}^2 a_{26} + \Psi_{12}^1 a_{27}) +$$

$$\Psi_{12}^2 (a_{29} + \Psi_{12}^1 a_{210} + \Psi_{12}^2 a_{211})] + \Psi_{12}^1 [b_{23} + \Psi_{12}^1 (b_{25} + \Psi_{12}^1 b_{26} + \Psi_{12}^1 b_{27})$$

$$+ \Psi_{12}^2 (b_{29} + \Psi_{12}^1 b_{210} + \Psi_{12}^2 b_{211})] + \Psi_{23}^1 / u^2 \} y_n^2 + T_2(x_n, y_n, \xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)})$$

$$+ T_3 + \cdots$$

Ecrivons ξ_{n+1}^1 sous la forme suivante

$$\xi_{n+1}^{(1)} = c_1 \xi_n^{(1)} + d_2 \xi_n^{(2)} + (a_1 + \Psi_{11}^1 (c_1 + u) + d_1 \Psi_{11}^2) x_n + (b_1 + \Psi_{12}^1 (c_1 + \frac{1}{u}) + d_1 \Psi_{12}^2) y_n$$

$$+ [E^1 x_2(\Psi) + \Psi_{21}^1 u^2] x_n^2 + [E^1 xy(\Psi) + \Psi_{22}^1] x_n y_n + [E^1 y_2(\Psi) + \Psi_{23}^1 / u^2] y_n^2 + \cdots$$

Nous obtiendrons ξ_{n+1}^2 d'une façon similaire

$$\xi_{n+1}^{(2)} = c_2 \xi_n^{(1)} + d_2 \xi_n^{(2)} + (a_2 + \Psi_{11}^2 (c_2 + u) + d_2 \Psi_{11}) x_n + (b_2 + \Psi_{12}^2 (c_2 + \frac{1}{u}) + d_2 \Psi_{12}^1) y_n$$

$$+ [E^2 x_2(\Psi) + \Psi_{21}^2 u^2] x_n^2 + [E^2 xy(\Psi) + \Psi_{22}^2] x_n y_n + [E^2 y_2(\Psi) + \Psi_{23}^2 / u^2] y_n^2 + \cdots$$

Les 4 coefficients relatifs à x_n et y_n, linéaires en $\psi_{11}^1, \psi_{12}^1, \psi_{11}^2, \psi_{12}^2$, fournissent quatre équations. Leur résolution fournit les valeurs à donner aux paramètres $\psi_{11}^1, \psi_{11}^2, \psi_{12}^1$ et ψ_{12}^2 :

$$\psi_{11}^1 = \left[a_1 (c_2+u) - a_2 d_1 \right] / \left[d_1 d_2 - (c_2+u)(c_1+u) \right]$$

$$\psi_{11}^2 = \left[a_2 (c_1+u) - a_1 d_2 \right] / \left[d_1 d_2 - (c_1+u)(c_2+u) \right]$$

$$\psi_{12}^1 = \left[b_1 (c_2+\frac{1}{u}) - b_2 d_1 \right] / \left[d_1 d_2 - (c_2+\frac{1}{u})(c_1+\frac{1}{u}) \right]$$

$$\psi_{12}^2 = \left[b_2 (c_1+\frac{1}{u}) - b_1 d_2 \right] / \left[d_1 d_2 - (c_1+\frac{1}{u})(c_2+\frac{1}{u}) \right]$$

L'annulation des 6 coefficients des termes en x_n^2, $x_n y_n$ et y_n^2 fournit les 6 équations suivantes :

$$\psi_{21}^1 (c_1+u^2) + d_1 \psi_{21}^2 + E_{x_2}^{(1)}(\psi) = 0$$

$$\psi_{22}^1 (c_1+1) + d_1 \psi_{22}^2 + E_{xy}^{(1)}(\psi) = 0$$

$$\psi_{23}^1 (c_1+\frac{1}{u^2}) + d_1 \psi_{23}^2 + E_{y_2}^{(1)}(\psi) = 0$$

$$\psi_{21}^2 (c_2+u^2) + d_2 \psi_{21}^1 + E_{x_2}^{(2)}(\psi) = 0$$

$$\psi_{22}^2 (c_2+1) + d_2 \psi_{22}^1 + E_{xy}^{(2)}(\psi) = 0$$

$$\psi_{23}^2 (c_2+\frac{1}{u^2}) + d_2 \psi_{23}^1 + E_{y_2}^{(2)}(\psi) = 0$$

Ces dernières sont linéaires par rapport aux variables $\psi_{21}^1, \psi_{22}^1, \psi_{23}^1, \psi_{21}^2, \psi_{22}^2, \psi_{23}^2$ leur résolution, par deux à deux, s'effectue aisément. Les expressions de $\xi_{n+1}^{(1)}$ et $\xi_{n+1}^{(2)}$ deviennent

$$\xi_{n+1}^{(1)} = c_1 \xi_n^{(1)} + d_1 \xi_n^{(2)} + \overline{R_2^{(1)}}_{\xi}(x_n, y_n, \xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}) + \overline{R_3^{(1)}} + \cdots$$

$$\xi_{n+1}^{(2)} = c_2 \xi_n^{(1)} + d_2 \xi_n^{(2)} + \overline{R_2^{1}}_{\xi_n}(x_n, y_n, \xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}) + \overline{R_3^{(2)}} + \cdots$$

4-2 - Expression de G_1

Après la transformation, la nouvelle récurrence prend la forme :

$$x_{n+1} = x_n e^{j\varphi} + \bar{P}_2(x_n, y_n, \xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}) + \bar{P}_3(\ldots) + \ldots$$

$$y_{n+1} = y_n e^{-j\varphi} + \bar{Q}_2(x_n, y_n, \xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}) + \bar{Q}_3(\ldots) + \ldots$$

$$\xi_{n+1}^{(1)} = c_1 \xi_n^{(1)} + d_1 \xi_n^{(2)} + \bar{R}_{2\xi}^{(1)}(x_n, y_n, \xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}) + \bar{R}_3^{(1)}(\ldots) + \ldots$$

$$\xi_{n+1}^{(2)} = c_2 \xi_n^{(1)} + d_2 \xi_n^{(2)} + R_{2\xi}^{(2)}(x_n, y_n, \xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}) + \bar{R}_3^{(2)}(\ldots) + \ldots$$

Dans le cas de base où nous avons $G_1 \neq 0$, nous choisissons une fonction de Ljapunov de la forme :

$$V = G_1[xy + f_3(x,y) + f_4(x,y)] + W(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) + F_3(x, y, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}) + F_4(x, y, \xi^{(1)}, \xi^{(2)})$$

Nous formerons $\Delta V = V_{n+1} - V_n$ en l'écrivant de la façon suivante ;

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 + \ldots$$

Les coefficients indéterminés φ et Ψ dans les fonctions f_3 et f_4, F_3 et F_4 permettent d'annuler les expressions ΔV_1 à ΔV_4 à l'exception du coefficient du monome $(x, y)^{\ell}$, et de la forme quadratique en ξ, de sorte que :

$$\Delta V = G_1^2 (x, y)^2 + \xi^{(1)2} + \xi^{(2)2}$$

Si G_1 est nulle, nous calculons jusqu'à :

$$\Delta V_{2\ell+2} = G_\ell^2 (x, y)^{\ell+1}$$

où G_ℓ est la première expression G non nulle. Le signe de G_1, ou de G_ℓ, permet de déterminer la stabilité du point double O.

5 - APPLICATION : UNE RECURRENCE D'ORDRE 3

5-1 - Prévision théorique

Considérons la récurrence autonome du troisième ordre à variables réelles :

$$(5\text{-}1)\quad \begin{cases} r_{n+1} = r_n \cos\varphi - s_n \sin\varphi + D\, r_n^3 + M\, z_n^3 \\ s_{n+1} = s_n \cos\varphi + r_n \sin\varphi + D' r_n^3 + N\, z_n^3 \\ z_{n+1} = c\, z_n + 2\, d\, r_n (r_n^2 + s_n^2) \end{cases}$$

où les coefficients D, D', M N d sont des constantes réelles, $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$, et ayant deux multiplicateurs complexes conjugués de module unité $S_{12} = e^{\pm j\varphi}$ et le troisième multiplicateur C de module inférieur à un. En utilisant la transformation

$$\left.\begin{aligned} x &= r + js \\ y &= r - js \end{aligned}\right\} \longleftrightarrow \begin{cases} r = 0{,}5\,(x+y) \\ s = -0{,}5\, j\,(x-y) \end{cases}$$

nous pouvons mettre la récurrence (5-1) sous la forme :

$$(5\text{-}2)\quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n e^{j\varphi} + \beta\, x_n^2 y_n + M\, z_n^3 \\ y_{n+1} = y_n e^{-j\varphi} + \bar{\beta}\, x_n y_n^2 + N\, z_n^3 \\ z_{n+1} = c\, z_n + d\,(x_n^2 y_n + x_n y_n^2) \end{cases}$$

où x_n, y_n sont maintenant des variables complexes, et où β, $\bar{\beta} = 3/8\,[D \pm jI$ sont des coefficients complexes conjugués. Admettons que $G_\ell = G_1 \quad (\ell = 1)$ soit non nulle. L'hypothèse sur les multiplicateurs $e^{\pm j\varphi}$ et C ainsi que la constatation de l'absence de $R_{zz}(x_n, y_n, z_n)$ dans z_{n+1} se trouve dans les conditions du cas particulier discuté au paragraphe 2-2. Soit la récurrence

$$(5\text{-}3)\quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n e^{j\varphi} + X(x_n, y_n, 0) = x_n e^{j\varphi} + \beta\, x_n^2 y_n \\ y_{n+1} = y_n e^{-j\varphi} + Y(x_n, y_n, 0) = y_n e^{-j\varphi} + \bar{\beta}\, x_n y_n^2 \end{cases}$$

Les résultats obtenus au paragraphe 3-2 nous montre que la stabilité du point O de (5-2) peut être étudiée par le signe de l'expression de G_1 associée à la récurrence (5-3). Dans notre cas, l'expression de G_1 s'écrit :

$$G_1 = \beta e^{-j\varphi} + \bar{\beta} e^{j\varphi} = 2\cos\varphi . Re(\beta) + 2\sin\varphi . Im(\beta)$$

$$= \frac{3}{4}(D.\cos\varphi + D'\sin\varphi) = \frac{3}{4} D' \cos\varphi \left[\frac{D}{D'} + tg\,\varphi\right]$$

$$= \frac{3}{4} D' \cos\varphi . M.$$

Pour des valeurs données de D', D et φ, il est donc théoriquement possible de prévoir la stabilité du point O. Prenons D' = 1. Choisissons d'autre part

a) $\varphi = \pi/4$

b) $\varphi = 3\pi/4$.

Dans chacun de ces cas, choisissons deux valeurs de D de sorte que $G_1 > 0$ pour l'une des valeurs, $G_1 < 0$ pour l'autre.

Le tableau suivant résume les données et les prévisions

Cas	φ	Cos φ	tg φ	D/D'	G_1	Prévisions
a_1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	-1, 2	< 0	stable
a_2				-0, 8	> 0	instable
b_1	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	1, 2	< 0	stable
b_2				0, 8	> 0	instable

5-2 - Vérification numérique

Sur la base de la récurrence (5-1) (variables réelles), les prévisions précédentes ont été vérifiées . A l'aide de (5-1), le point M_n (x_n , y_n , z_n) est continuellement calculé jusqu'à ce qu'il y a convergence vers O ou instabilité vers l'infini. Deux séries de calculs ont été effectuées. Les valeurs communes utilisées dans les deux séries sont :

$M = N = 0,1$; $D' = 1$; $c = d = 0,1$; point initial

$M_0 (r_0, s_0, z_0) = (0,5 ; 0,5 ; 0,5)$; critère de convergence $\varepsilon = 0,1$. L'amplitude maximale XM et le nombre maximal d'itérations NMAX ont été pris différents dans les deux séries.

Dans la première série de calculs, nous avons pris XM=10, NMAX=50.

- les deux cas (a2) et (b2) sont vérifiés instables très rapidement, l'une des trois coordonnées dépasse XM en moins de 20 itérations. Par ailleur, le dépassement de l'une entraîne celui des deux autres variables en 2 ou 3 itérations
- les deux cas (a1) et (b1) sont vérifiés convergents, mais très lentement. La variable z_n tombe au-dessous de 0,01 à partir de n = 18. Les deux autres variables oscillent entre 0,001 et 0,5 durant plusieurs périodes tout en ayant leur amplitude moyenne décroissante.

Pour mieux voir le comportement transitoire des deux cas stables (a1) et (b1), nous avons pris XM = 100, NMAX = 1000, mais avec impression de résultats toutes les 10 itérations :

- même avec XM = 100, les deux cas instables (a2) et (b2) ont leur dépassement aux environs de n = 20.
- concernant les cas stables (a1) et (b1), les amplitudes moyennes de r_n et s_n deviennent plus petites que 0,2 au bout de 150 itérations. La variable z_n devient plus petite que 0,0003 au bout de 210 itérations. Au bout de 1600 itérations, l'amplitude moyenne de r_n et s_n devient inférieure à 0,06 .

En principe, nous savons que les cas (a1) et (b1), stables, correspondent aux trajectoires du type foyer. Ces trajectoires sont, toutefois, fort complexes, même en supposant $z_n = 0$. En effet, la projection de la trajectoire sur le plan r_n, s_n n'est pas une spirale, mais formée par des ellipses à axes tournants et s'appuyant sur une enveloppe du type foyer stable de forme spirale. (ou courbes de Lissajous amorties).

Annexe 2 A - CALCULS RELATIFS AUX NOUVEAUX COEFFICIENTS DE LA RECURRENCE DU TROISIEME ORDRE

(voir paragraphe 3-1)

1°) $R_2(x_n, y_n, z_n)$

$$R_2(x_n, y_n, z_n) = R_2(x_n, y_n, \xi_n + v_n) = d_{21} x_n^2 + d_{22} x_n y_n + d_{23} y_n^2 + (\xi_n + v_n)(d_{24} x_n + d_{25} y_n + d_{26}(\xi_n + v_n))$$

En utilisant (20) et en groupant les termes :

$$(22)\quad R_2(x_n, y_n, \xi_n) = (d_{21} + \psi_{11} d_{24} + \psi_{11}^2 d_{26}) x_n^2 + (d_{22} + \psi_{11} d_{25} + \psi_{12} d_{24} + 2\psi_{11}\psi_{12} d_{26}) x_n y_n + (d_{23} + \psi_{12} d_{25} + \psi_{12}^2 d_{26}) y_n^2 + (d_{24} + 2 d_{26} \psi_{11}) x_n \xi_n + (d_{25} + 2\psi_{12} d_{26}) y_n \xi_n + d_{26} \xi_n^2 + T^3 \cdots\cdots$$

Dans le cas où nous avons pris $l = 1$, il est inutile de calculer les termes de degrés supérieurs à 3 dans R_2, et de développer R_3

2°) $T_1 = \psi_{11} x_{n+1}$

Pour simplifier les écritures, posons $u = e^{j\varphi}$

$$x_{n+1} = x_n u + P_2(x_n, y_n, \xi_n + v_n) + P_3(x_n, y_n, \xi_n + v_n) + \cdots\cdots$$

En utilisant (20) et en groupant les termes, et en calculant dans P_3, uniquement les termes du 3è degré, les seuls qui intéressent le calcul de G_1 :

$$P_2(x_n, y_n, \xi_n + v_n) = a_{21} x_n^2 + a_{22} x_n y_n + a_{23} y_n^2 + (\xi_n + v_n)(a_{24} x_n + a_{25} y_n + a_{26}(\xi_n + v_n))$$

$$P_2(x_n, y_n, \xi_n + v_n) = (a_{21} + \psi_{11} a_{24} + \psi_{11}^2 a_{26}) x_n^2 + (a_{22} + \psi_{11} a_{25} + \psi_{12} a_{24} +$$

$$+ 2\psi_{11}\psi_{12} a_{26}) x_n y_n + (a_{23} + \psi_{12} a_{25} + \psi_{12}^2 a_{26}) y_n^2 + (a_{24} + 2\psi_{11} a_{26}) x_n \xi_n +$$

$$+ (a_{25} + 2\psi_{12} a_{26}) y_n \xi_n + a_{26} \xi_n^2 +$$

$$+ (\psi_{21} a_{24} + 2\psi_{11}\psi_{21} a_{26}) x_n^3 + [\psi_{21} a_{25} + \psi_{22} a_{24} + 2a_{26}(\psi_{11}\psi_{22} + \psi_{12}\psi_{21})] x_n^2 y_n +$$

$$+ [\psi_{22} a_{25} + a_{24}\psi_{23} + 2a_{26}(\psi_{11}\psi_{23} + \psi_{12}\psi_{22})] x_n y_n^2 + (\psi_{23} a_{25} +$$

$$+ 2\psi_{12}\psi_{23} a_{26}) y_n^3 + 2\psi_{21} a_{26} \xi_n x_n^2 + 2\psi_{22} a_{26} \xi_n x_n y_n +$$

$$+ 2\psi_{23} a_{26} \xi_n y_n^2 + \psi_{21}^2 a_{26} x_n^4 + 2a_{26}\psi_{21}\psi_{22} x_n^3 y_n + (\psi_{22}^2 a_{26} +$$

$$+ 2\psi_{21}\psi_{23} a_{26}) x_n^2 y_n^2 + 2\psi_{22}\psi_{23} a_{26} x_n y_n^3 + \psi_{23}^2 a_{26} y_n^4$$

$$P_3(x_n, y_n, \xi_n + v_n) = a_{31} x_n^3 + a_{32} x_n^2 y_n + a_{33} x_n y_n^2 + a_{34} y_n^3 +$$

$$+ (\xi_n + v_n)(a_{35} x_n^2 + a_{36} x_n^2 y_n + a_{37} y_n^2) + (\xi_n + v_n)^2 (a_{38} x_n +$$

$$+ a_{39} y_n) + a_{310} (\xi_n + v_n)^3 .$$

$$P_3(x_n, y_n, \xi_n + v_n) = (a_{31} + \psi_{11} a_{35} + \psi_{11}^2 a_{38} + \psi_{11}^2 a_{310}) x_n^3 +$$

$$+ (a_{32} + \psi_{11} a_{36} + \psi_{12} a_{35} + 2\psi_{11}\psi_{12} a_{38} + \psi_{11}^2 a_{39} + 2\psi_{11}^2 \psi_{12} a_{310}) x_n^2 y_n +$$

$$+ (a_{33} + \psi_{11} a_{37} + \psi_{12} a_{36} + \psi_{12}^2 a_{38} + 2\psi_{11}\psi_{12} a_{39} + 3\psi_{11}\psi_{12}^2 a_{310}) x_n y_n^2 +$$

$$+ (a_{34} + \psi_{12} a_{37} + \psi_{12}^2 a_{39} + \psi_{12}^3 a_{310}) y_n^3 +$$

$$+ (a_{35} + 2\psi_{11} a_{38} + \psi_{11}^2 a_{310}) \xi_n x_n^2 +$$

$$+ (a_{36} + 2\psi_{12} a_{38} + 2\psi_{11} a_{39} + 6\psi_{11}\psi_{12} a_{310}) \xi_n x_n y_n +$$

$$+(a_{37}+2\psi_{12}a_{39}+3\psi_{12}^2 a_{310})\,\xi_n y_n^2$$

$$+(3\psi_{11}a_{310}+a_{38})\xi_n^2 x_n+(3\psi_{12}a_{310}+a_{39})\xi_n^2 y_n+a_{310}\xi_n^3+T^4+\ldots\ldots$$

Remarquons qu'après la transformation, les polynômes $P_2(x_n, y_n, \xi_n+v_n)$ et $P_3(x_n, y_n, \xi_n+v_n)$ contiennent des termes de degrés respectivement supérieurs à 2 et à 3.

En désignant par $\bar{P}_2(x_n, y_n, \xi_n)$ et $\bar{P}_3(x_n, y_n, \xi)$ les polynômes contenant uniquement les termes de degré respectivement égal à 2 et à 3, la nouvelle expression de x_{n+1}, et par suite de T_1 devient :

$$T_1 = \psi_{11}x_{n+1}(x_n, y_n, \xi_n) = \psi_{11}\left[x_n u+\bar{P}_2(x_n, y_n, \xi_n)+\bar{P}_3(x_n, y_n, \xi_n)\right.$$

(23) $+---\Big]$

$$T_1=\psi_{11}\left[x_n u+\bar{a}_{21}x_n^2+\bar{a}_{22}x_n y_n+\bar{a}_{23}y_n^2+\bar{a}_{24}x_n\xi_n+\bar{a}_{25}y_n\xi_n\right.$$
$$+\bar{a}_{26}\xi_n^2+\bar{a}_{31}x_n^3+\bar{a}_{32}x_n^2+\bar{a}_{33}x_n y_n^2+\bar{a}_{34}y_n^3+$$
$$\left.+\xi_n(\bar{a}_{35}x_n^2+\bar{a}_{36}x_n y_n+\bar{a}_{37}y_n^2)+\xi_n^2(\bar{a}_{38}+\bar{a}_{39}y_n)+\bar{a}_{310}\xi_n^2\right]$$

avec

$$\bar{a}_{21} = a_{21}+\psi_{11}a_{24}+\psi_{11}^2 a_{26}$$

$$\bar{a}_{22} = a_{22}+\psi_{11}a_{25}+\psi_{12}a_{24}+2\psi_{11}\psi_{12}a_{26}$$

$$\bar{a}_{23} = a_{23}+\psi_{12}a_{25}+\psi_{12}^2 a_{26}$$

$$\bar{a}_{24} = a_{24}+2\psi_{11}a_{26}$$

$$\bar{a}_{25} = a_{25}+2\psi_{12}a_{26}$$

$$\bar{a}_{26} = a_{26}$$

$$\bar{a}_{31} = a_{31} + 2\Psi_{11}\Psi_{12}a_{26} + \Psi_{21}a_{24} + \Psi_{11}a_{35} + \Psi_{11}^2 a_{38} + \Psi_{11}^3 a_{310}.$$

$$\bar{a}_{32} = a_{32} + (2\Psi_{11}\Psi_{22} + 2\Psi_{12}\Psi_{21})a_{26} + \Psi_{21}a_{25} + \Psi_{22}a_{24} + \Psi_{11}a_{36} + \Psi_{12}a_{35} + 2\Psi_{11}\Psi_{12}a_{38} + \Psi_{11}^2(a_{39} + 2\Psi_{12}a_{310})$$

$$\bar{a}_{33} = a_{33} + (2\Psi_{11}\Psi_{23} + 2\Psi_{12}\Psi_{22})a_{26} + \Psi_{22}a_{25} + \Psi_{23}a_{24} + \Psi_{11}a_{37} + \Psi_{12}a_{36} + \Psi_{12}^2 a_{38} + \Psi_{11}\Psi_{12}(2a_{39} + 3\Psi_{12}a_{310})$$

$$\bar{a}_{34} = a_{34} + 2\Psi_{12}\Psi_{23}a_{26} + \Psi_{23}a_{25} + \Psi_{12}a_{37} + \Psi_{12}^2 a_{39} + \Psi_{12}^3 a_{310}$$

$$\bar{a}_{35} = a_{35} + 2\Psi_{21}a_{26} + 2\Psi_{11}a_{38} + 3\Psi_{11}^2 a_{310}.$$

$$\bar{a}_{36} = a_{36} + 2\Psi_{22}a_{26} + 2\Psi_{12}a_{38} + 2\Psi_{11}a_{39} + 6\Psi_{11}\Psi_{12}a_{310}$$

$$\bar{a}_{37} = a_{37} + 2\Psi_{23}a_{26} + 2\Psi_{12}a_{39} + 3\Psi_{11}^2 a_{310}.$$

$$\bar{a}_{38} = a_{38} + 2\Psi_{11}a_{310}$$

$$\bar{a}_{39} = a_{39} + 2\Psi_{12}a_{310}.$$

$$\bar{a}_{310} = a_{310}$$

Les coefficients Ψ vont être déterminés ci-après.

3°) $T_2 = \Psi_{12}\, y_{n+1}$

En utilisant les coefficients b à la place des coefficients a, les calculs de T_2 sont similaires à ceux de T_1. Nous obtenons ainsi :

$$T_2 = \Psi_{12}\, y_{n+1}(x_n, y_n, \xi_n) = \Psi_{12}\left[y_n/u + \bar{Q}_2(x_n, y_n, \xi_n) + \bar{Q}_3(x_n, y_n, \xi_n) + \cdots\right]$$

(24)
$$T_3 = \Psi_{12}\left[y_n/u + \bar{b}_{21} x_n^2 + \bar{b}_{22} x_y y_n + \bar{b}_{23} y_n^2 + \bar{b}_{24} x_n \xi_n + \right.$$
$$\bar{b}_{25} y_n \xi_n + \bar{b}_{26} \xi_n^2 + \bar{b}_{31} x_n^3 + \bar{b}_{32} x_n^2 y_n + \bar{b}_{33} x_n y_n^2 +$$
$$\bar{b}_{34} y_n^3 + \xi_n (\bar{b}_{35} x_n^2 + \bar{b}_{36} x_n y_n^2 + \bar{b}_{37} y_n^3) +$$
$$\left. + \xi_n^2 (\bar{b}_{38} x_n + \bar{b}_{39} y_n) + \bar{b}_{310} \xi_n^3 \right]$$

avec :

$$\bar{b}_{21} = b_{21} + \Psi_{11} b_{24} + \Psi_{11}^2 b_{26}$$

$$\bar{b}_{22} = b_{22} + \Psi_{11} b_{25} + \Psi_{12} b_{24} + 2\Psi_{11}\Psi_{12} b_{26}$$

$$\bar{b}_{23} = b_{23} + \Psi_{12} b_{25} + \Psi_{12}^2 b_{26}$$

$$\bar{b}_{24} = b_{24} + 2\Psi_{11} b_{26}$$

$$\bar{b}_{25} = b_{25} + 2\Psi_{12} b_{26}$$

$$\bar{b}_{26} = b_{26}$$

$$\bar{b}_{31} = b_{31} + 2\Psi_{11}\Psi_{12} b_{26} + \Psi_{21} b_{24} + \Psi_{11} b_{35} + \Psi_{11}^2 b_{38} + \Psi_{11}^3 b_{310}$$

$$\bar{b}_{32} = b_{32} + (2\Psi_{11}\Psi_{22} + 2\Psi_{12}\Psi_{21}) b_{26} + \Psi_{21} b_{25} + \Psi_{22} b_{24} + \Psi_{11} b_{36} +$$
$$+ \Psi_{12} b_{35} + 2\Psi_{11}\Psi_{12} b_{38} + \Psi_{11}^2 (b_{39} + 2\Psi_{12} b_{310})$$

$$\bar{b}_{33} = b_{33} + (2\Psi_{11}\Psi_{23} + 2\Psi_{12}\Psi_{22}) b_{26} + \Psi_{22} b_{25} + \Psi_{23} b_{24} + \Psi_{11} b_{37} +$$
$$+ \Psi_{12} b_{36} + \Psi_{12}^2 b_{38} + \Psi_{11}\Psi_{12} (2 b_{39} + 3\Psi_{12} b_{310}).$$

$$\bar{b}_{34} = b_{34} + 2\Psi_{12}\Psi_{23} b_{26} + \Psi_{23} b_{25} + \Psi_{12} b_{37} + \Psi_{12}^2 b_{39} + \Psi_{12}^3 b_{310}$$

$$\bar{b}_{35} = b_{35} + 2\Psi_{21} b_{26} + 2\Psi_{11} b_{38} + 3\Psi_{11}^2 b_{310}$$

$$\bar{b}_{36} = b_{36} + 2\Psi_{22} b_{26} + 2\Psi_{12} b_{38} + 2\Psi_{11} b_{39} + 6\Psi_{11}\Psi_{12} b_{310}$$

$$\bar{b}_{37} = b_{37} + 2\Psi_{23} b_{26} + 2\Psi_{12} b_{39} + 3\Psi_{11}^2 b_{310}$$

$$\bar{b}_{38} = b_{38} + 2\Psi_{11} b_{310}$$

En effectuant la somme de ces trois expressions, et en groupant les termes du même degré, nous obtenons :

$$(25)\quad T_3 + T_4 + T_5 = \Psi_{21} x_n^2 u^2 + \Psi_{22} x_n y_n + \Psi_{23} \frac{y_n^2}{u^2}$$

$$+\left[2\Psi_{21} u (a_{21} + \Psi_{11} a_{24} + \Psi_{11}^2 a_{26}) + \Psi_{22} u (b_{21} + \Psi_{11} b_{24} + \Psi_{11}^2 b_{26}\right] x_n^3$$

$$+\left[2\Psi_{21} u (a_{22} + \Psi_{11} a_{25} + \Psi_{12} a_{24} + 2\Psi_{11}\Psi_{12} a_{26}) + \frac{\Psi_{22}}{u}(a_{21} + \Psi_{11} a_{24} + \Psi_{11}^2 a_{26}) +\right.$$

$$+ \frac{2\Psi_{23}}{u}(b_{21} + \Psi_{11} b_{24} + \Psi_{11}^2 b_{26}) + \Psi_{22} u (b_{22} + \Psi_{11} b_{25} + \Psi_{12} b_{24} +$$

$$\left. + 2\Psi_{11}\Psi_{12} b_{26})\right] x_n^2 y_n + \left[2\Psi_{21} u (a_{23} + \Psi_{12} a_{25} + \Psi_{12}^2 a_{26}) +\right.$$

$$+ \frac{\Psi_{22}}{u}(a_{22} + \Psi_{11} a_{25} + \Psi_{12} a_{24} + 2\Psi_{11}\Psi_{12} a_{26}) + \Psi_{22} u (b_{23} + \Psi_{12} b_{25} + \Psi_{12}^2 b_{26})$$

$$\left. + \frac{2\Psi_{23}}{u}(b_{22} + \Psi_{11} b_{25} + \Psi_{12} b_{24} + 2\Psi_{11}\Psi_{12} b_{26})\right] x_n y_n^2 + \frac{1}{u}\left[\Psi_{22}(a_{23} + \Psi_{12} a_{25}\right.$$

$$\left. + \Psi_{12} a_{26}) + 2\Psi_{23}(b_{23} + \Psi_{12} b_{25} + \Psi_{12}^2 b_{26})\right] y_n^3 + u\left[2\Psi_{21}(a_{24} + 2\Psi_{11} a_{26}) +\right.$$

$$\left.\Psi_{22}(b_{24} + 2\Psi_{11} b_{26})\right] \xi_n x_n^2 + \left[2\Psi_{21} u (a_{25} + 2\Psi_{12} a_{26}) + \Psi_{22}\left\{\frac{1}{u}\right.\right.$$

$$\left.\left.(a_{24} + 2\Psi_{11} a_{26}) + u(b_{25} + 2\Psi_{12} b_{26})\right\} + \frac{2\Psi_{23}}{u}(b_{24} + 2\Psi_{11} b_{26})\right]$$

$$\xi_n x_n y_n + \frac{1}{u}\left[\Psi_{22}(a_{25} + 2\Psi_{12} a_{26}) + 2\Psi_{23}(b_{25} + 2\Psi_{12} b_{26})\right]$$

$$\xi_n y_n^2 + u(2\Psi_{21} a_{26} + \Psi_{22} b_{26})\, \xi_n^2 x_n + \frac{1}{u}(\Psi_{22} a_{26} +$$

$$2\Psi_{23} b_{26})\, \xi_n^2 y_n .$$

$$\overline{b_{39}} = b_{39} + 2\,\Psi_{12}\, b_{310}$$

$$\overline{b_{310}} = b_{310}$$

Les coefficients Ψ vont être déterminés ci-après.

4°) $T_3 = \Psi_{21}\, x_{n+1}^2$, $T_4 = \Psi_{22}\, x_{n+1}\, y_{n+1}$, $T_5 = \Psi_{23}\, y_{n+1}^2$

En ne prenant que des termes de degré ≤ 3, nous avons :

$$T_3 = \Psi_{21}\,(x_n u + P_2 + P_3 + \cdots)^2 = \Psi_{21}\,(x_n^2 u^2 + 2 x_n u\, P_2 + \cdots)$$

$$T_4 = \Psi_{21}\,(x_n u + P_2 + P_3 + \cdots)(y_n/u + Q_2 + Q_3 + \cdots)$$

$$= \Psi_{22}\,(x_n y_n + x_n u\, Q_2 + \frac{y_n}{u} P_2 + \cdots)$$

$$T_5 = \Psi_{23}\,(\frac{y_n}{u} + Q_2 + Q_3 + \cdots)^2 = \Psi_{23}\,(\frac{y_n^2}{u^2} + 2\,\frac{y_n}{u}\, Q_2 + \cdots)$$

Annexe 2 B - CALCUL DES TERMES DE ΔV DANS LA DETERMINATION DE G_1

(voir paragraphe 3-2)

En substituant les valeurs de x_{n+1} , y_{n+1} , ξ_{n+1} de (29) dans (32), nous trouvons

(33) $$\Delta V_2 = G_1 \left[x_n y_n - x_n y_n \right] + \frac{c^2}{c^2-1} \xi_n^2 - \frac{1}{c^2-1} \xi_n^2 = \xi_n^2$$

(34) $$\Delta V_3 = G_1 \Big[x_n^3 \left\{ \varphi_{33} (u^3-1) + u \bar{b}_{21} \right\} + x_n^2 y_n \left\{ \varphi_{32} (u-1) + u \bar{b}_{22} + \frac{\bar{a}_{21}}{u} \right\} +$$

$$+ x_n y_n^2 \left\{ \varphi_{33} \left(\frac{1}{u} - 1 \right) + u \bar{b}_{23} + \frac{\bar{a}_{22}}{u} \right\} + y_n^3 \left\{ \varphi_{34} \left(\frac{1}{u^3} - 1 \right) + \frac{\bar{a}_{23}}{u} \right\} \Big] +$$

$$+ \xi_n^3 \left[\gamma_{31} (c^3-1) + \frac{\bar{d}_{26}}{c^2-1} \right] + \xi_n^2 x_n \left[\gamma_{32} (cu^2-1) + G_1 u \bar{b}_{26} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{d}_{24}}{c^2-1} \right] + \xi_n^2 y_n \left[\gamma_{33} \left(\frac{c^2}{u} - 1 \right) + G_1 \frac{\bar{d}_{26}}{u} + \frac{\bar{d}_{25}}{c^2-1} \right] +$$

$$+ \xi_n x_n^2 \left[\gamma_{34} (cu^2-1) + G_1 u \bar{b}_{24} \right] + \xi_n y_n x_n \left[\gamma_{35} (c-1) + G_1 \left(u \bar{b}_{25} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\bar{a}_{24}}{u} \right) \right] + \xi_n y_n^2 \left[\gamma_{36} \left(\frac{c}{u^2} - 1 \right) + G_1 \frac{\bar{a}_{25}}{u} \right]$$

Nous pouvons annuler tous les termes du second membre de (34) en choisissant pour les coefficients φ_{31} à φ_{34}, γ_{31} à γ_{36} les valeurs suivantes :

$$\varphi_{31} = \frac{u\,\bar{b}_{21}}{1-u^3} \qquad u = e^{j\varphi}$$

$$\varphi_{32} = \frac{u^2\bar{b}_{22} + \bar{a}_{21}}{u(1-u)}$$

$$\varphi_{33} = \frac{u^2\bar{b}_{23} + \bar{a}_{22}}{u-1}$$

$$\varphi_{34} = \frac{u^2\,\bar{a}_{23}}{u^3-1}$$

$$\gamma_{31} = \bar{d}_{26} \Big/ (c^2-1)(1-c^3)$$

$$\gamma_{32} = \left[G_1 u\,\bar{b}_{26} + \frac{\bar{d}_{24}}{c^2-1}\right] \Big/ (1-cu^2)$$

$$\gamma_{33} = \left[G_1\,\frac{\bar{d}_{26}}{u} + \frac{\bar{d}_{25}}{c^2-1}\right] \Big/ \left(1-\frac{c^2}{u}\right)$$

$$\gamma_{34} = G_1\,u\,\bar{b}_{24} \Big/ (1-cu^2)$$

$$\gamma_{35} = G_1\left(u\,\bar{b}_{25} + \frac{\bar{a}_{24}}{u}\right) \Big/ (1-c)$$

$$\gamma_{36} = G_1\,u\,\bar{a}_{25} \Big/ (u^2-c)$$

Les valeurs de ces coefficients dépendent uniquement des données du problème, c'est-à-dire : les paramètres φ et C, et les coefficients $\bar{a}$, $\bar{b}$ et $\bar{d}$. En effet, l'expression de G_1 elle-même, sera rendue fonction des mêmes paramètres. Les dénominateurs d'aucun de ces coefficients ne peuvent être nuls, pour les raisons suivantes :

1°) $e^{j\varphi} = u$ est imaginaire
2°) C est réel
3°) d'autre part, $|C| < 1$

L'expression de ΔV_4 est :

(35)

$$\Delta V_4 = G_1\left[u\bar{b}_{31}+\bar{a}_{21}\bar{b}_{21}+3\varphi_{31}u^2\bar{a}_{21}+\varphi_{32}u^2\bar{b}_{21}+\varphi_{41}(u^4-1)\right]x_n^4 +$$

$$+G_1\left[u\bar{b}_{32}+\frac{\bar{a}_{31}}{u}+\bar{a}_{22}\bar{b}_{21}+\bar{a}_{21}\bar{b}_{22}+2\varphi_{32}\bar{a}_{21}+3\varphi_{31}u^2\bar{a}_{21}+\right.$$

$$\left.+2\varphi_{33}\bar{b}_{21}+\varphi_{32}\bar{b}_{22}+\varphi_{42}(u^2-1)\right]x_n^3 y_n +$$

$$+G_1\left[u\bar{b}_{33}+\frac{\bar{a}_{32}}{u}+\bar{a}_{23}\bar{b}_{21}+\bar{a}_{22}\bar{b}_{22}+\bar{a}_{21}\bar{b}_{23}+\varphi_{33}\frac{\bar{a}_{21}}{u^2}+\right.$$

$$\left.+2\varphi_{32}\bar{a}_{22}+3\varphi_{31}\bar{a}_{23}u^2+\frac{3\varphi_{34}}{u^2}\bar{b}_{21}+2\varphi_{33}\bar{b}_{21}+\varphi_{32}u^2\bar{b}_{23}\right]x_n^2 y_n^2$$

$$+G_1\left[u\bar{b}_{34}+\frac{\bar{a}_{33}}{u}+\bar{a}_{23}\bar{b}_{21}+\bar{a}_{21}\bar{b}_{23}+\frac{\varphi_{33}}{u^2}\bar{a}_{22}+2\varphi_{32}\bar{a}_{23}+\frac{3\varphi_{34}}{u^2}\bar{b}_{22}+\right.$$

$$\left.+2\varphi_{33}\bar{b}_{23}+\varphi_{44}\left(\frac{1}{u^2}-1\right)\right]x_n y_n^3 +$$

$$+G_1\left[\frac{\bar{a}_{34}}{u}+\bar{a}_{23}\bar{b}_{23}+\bar{a}_{23}\frac{\varphi_{33}}{u^2}+\frac{3\varphi_{34}}{u^2}\bar{b}_{23}+\varphi_{45}\left(\frac{1}{u^4}-1\right)y_n^4+\right.$$

$$+\left[G_1\bar{a}_{26}\bar{b}_{26}+\gamma_{32}c^2\bar{a}_{26}+\gamma_{35}c^2\bar{b}_{26}+3\gamma_{31}c^2\bar{d}_{26}+\gamma_{41}(c^4-1)+\right.$$

$$\left.+\frac{\bar{d}_{26}}{c^2-1}+\frac{2c}{c^2-1}\bar{d}_{210}\right]\xi_n^4 +$$

$$+\left[G_1(u\bar{b}_{310}+\bar{a}_{26}\bar{b}_{24}+\bar{a}_{24}\bar{b}_{26})+\gamma_{32}c^2\bar{a}_{24}+2\gamma_{34}cu\bar{a}_{26}+\right.$$

$$+2\bar{d}_{24}\bar{d}_{26}/(c^2-1)+2c\bar{d}_{38}/(c^2-1)+\gamma_{33}c^2\bar{b}_{24}+\gamma_{35}cu\bar{b}_{26}+$$

$$\left.+2\gamma_{31}c^2\bar{d}_{24}+2\gamma_{32}cu\bar{d}_{26}+\gamma_{42}(c^3u-1)\right]\xi_n^3 x_n$$

$$+\left[G_1\left(\frac{\bar{a}_{310}}{u}+\bar{a}_{26}\bar{b}_{25}+\bar{a}_{25}\bar{b}_{26}\right)+\gamma_{32}c^2\bar{a}_{25}+\gamma_{35}\frac{c}{u}\bar{a}_{26}+\gamma_{33}c^2\bar{b}_{25}+\right.$$

$$+2\gamma_{36}\frac{c}{u}\bar{b}_{26}+3\gamma_{31}c^2\bar{d}_{25}+2\gamma_{33}\frac{c}{u}\bar{d}_{26}+\left(\frac{c^3}{u}-1\right)\gamma_{43}+$$

$$\left.+\frac{c}{c^2-1}(\bar{d}_{25}\bar{d}_{26}+c\bar{d}_{39})\right]\xi_n^3 y_n +$$

$$+\Big[G_1(u\bar b_{38}+\bar a_{26}\bar b_{21}+\bar a_{24}\bar b_{24}+\bar a_{21}\bar b_{26})+\gamma_{32}c^2\bar a_{21}+2\gamma_{34}cu\,\bar a_{24}+$$

$$+3\varphi_{31}u^2\bar a_{26}+\gamma_{33}c^2\bar b_{21}+\gamma_{35}cu\,\bar b_{24}+\varphi_{32}u^2\bar b_{26}+2\gamma_{32}cu\,\bar d_{24}+$$

$$+\gamma_{34}u^2\bar d_{26}+\gamma_{44}(c^2u^2-1)+\frac{\bar d_{24}^2}{c^2-1}+\frac{2c\bar d_{35}}{c^2-1}\Big]\xi_n^2x_n^2+$$

$$+\Big[G_1(u\bar b_{39}+\frac{\bar a_{38}}{u}+\bar a_{26}\bar b_{22}+\bar a_{25}\bar b_{24}+\bar a_{24}\bar b_{25}+\bar a_{22}\bar b_{26}+\gamma_{32}c^2\bar a_{27}+$$

$$+\frac{c}{u}\bar a_{24}\gamma_{35}+2\gamma_{34}cu\,\bar a_{25}+2\varphi_{32}\bar a_{26}+c^2\gamma_{33}\bar b_{22}+2\gamma_{36}\frac{c}{u}\bar b_{24}+$$

$$+\gamma_{35}cu\,\bar b_{25}+2\varphi_{33}\bar b_{26}+2\gamma_{33}\frac{c}{u}\bar d_{24}+2\gamma_{32}cu\,\bar d_{25}+\gamma_{35}\bar d_{26}+$$

$$+\gamma_{45}(c^2-1)+(2\bar d_{24}\bar d_{25}+2c\,\bar d_{36})/(c^2-1)\Big]\xi_n^2x_ny_n+$$

$$+\Big[G_1(\frac{\bar a_{39}}{u}+\bar a_{26}\bar b_{23}+\bar a_{25}\bar b_{25}+\bar a_{23}\bar b_{26})+\gamma_{32}c^2\bar a_{23}+\gamma_{35}\frac{c}{u}\bar a_{25}+$$

$$+\frac{\varphi_{33}}{u^2}\bar a_{26}+\gamma_{33}c^2\bar b_{23}+2\gamma_{36}\frac{c}{u}\bar b_{25}+3\frac{\varphi_{34}}{u^2}\bar b_{26}+2\gamma_{33}\frac{c}{u}\bar d_{25}+$$

$$+\gamma_{36}\frac{\bar d_{26}}{u^2}+\gamma_{46}\Big(\frac{c^2}{u^2}-1\Big)+(\bar d_{25}^2+2c\,\bar d_{37})/(c^2-1)\Big]\xi_n^2y_n^2+$$

$$+\Big[G_1(u\bar b_{36}+\frac{\bar a_{35}}{u}+\bar a_{25}\bar b_{21}+\bar a_{24}\bar b_{22}+\bar a_{22}\bar b_{24}+\bar a_{21}\bar b_{25})+\gamma_{35}\frac{c}{u}\bar a_{21}+$$

$$+2\gamma_{34}cu\,\bar a_{22}+2\varphi_{32}\bar a_{24}+3\varphi_{31}u^2\bar a_{25}+2\gamma_{36}\frac{c}{u}\bar b_{21}+\gamma_{35}cu\,\bar b_{22}+$$

$$+2\gamma_{33}\bar b_{24}+\varphi_{34}u^2\bar b_{25}+\gamma_{35}\bar d_{24}+\gamma_{34}u^2\bar d_{25}+\gamma_{48}(cu-1)+2c\bar d_{32}/(c^2-1)\Big]$$

$$\xi_nx_n^2y_n+\Big[G_1(u\bar b_{37}+\frac{\bar a_{36}}{u}+\bar a_{25}\bar b_{22}+\bar a_{24}\bar b_{23}+\bar a_{23}\bar b_{24}+\bar a_{22}\bar b_{25})+\gamma_{35}\frac{c}{u}\bar a_{22}+$$

$$+2\gamma_{34}cu\,\bar a_{23}+\frac{\varphi_{33}}{u^2}\bar a_{24}+2\varphi_{32}\bar a_{25}+2\gamma_{36}\frac{c}{u}\bar b_{22}+\frac{\gamma_{36}}{u^2}\bar d_{24}+$$

$$+\gamma_{35}cu\,\bar b_{23}+\frac{3\varphi_{34}}{u^2}\bar b_{24}+2\varphi_{33}\bar b_{25}+\frac{\gamma_{35}}{u^2}\bar d_{25}+\gamma_{49}\Big(\frac{c}{u}-1\Big)+$$

$$+2c\,\bar d_{33}/(c^2-1)\Big]\xi_nx_ny_n^2+$$

$$+\Big[G_1(\frac{\bar a_{39}}{u}+\bar a_{25}\bar b_{23}+\bar a_{23}\bar b_{25})+\gamma_{35}\frac{c}{u}\bar a_{23}+\frac{\varphi_{33}}{u^2}\bar a_{25}+2\gamma_{36}\frac{c}{u}\bar b_{23}+$$

$$+\frac{3\varphi_{34}}{u^2}\bar b_{25}+\frac{\gamma_{36}}{u^2}\bar d_{25}+\gamma_{410}\Big(\frac{c}{u^3}-1\Big)+\frac{2c}{c^2-1}\bar d_{34}\Big]\xi_ny_n^3$$

$$+\Big[G_1(u\bar b_{35}+\bar a_{24}\bar b_{21}+\bar a_{21}\bar b_{24})+3cu\,\gamma_{34}\bar a_{21}+3\varphi_{31}u^2\bar a_{24}+$$

$$+\gamma_{35}cu\,\bar b_{21}+\varphi_{32}u^2\bar b_{24}+\gamma_{34}u^2\bar d_{24}+\gamma_{47}(cu^3-1)+$$

$$+2c\,\bar d_{31}/(c^2-1)\Big]\xi_nx_n^3.$$

CHAPITRE 3

APPLICATION DES RESULTATS SUR LA STABILITE DE CERTAINS CAS CRITIQUES A DES SYSTEMES A DONNEES ECHANTILLONNEES

1 - Introduction

2 - Régulateurs non linéaires échantillonnés - Problème de Lur'e

- 2-1 - Problème
- 2-2 - Transformation en cas particulier
- 2-3 - Etablissement de l'expression de G1
- 2-4 - Quelques conclusions

3 - Système échantillonné non linéaire avec bloqueur d'ordre un

- 3-1 - Description du système et mise en équation
- 3-2 - Etablissement des récurrences associées
- 3-3 - Stabilité locale
- 3-4 - Stabilité d'un cas critique
  - 3-4-1 - Conditions sur les paramètres k et T
  - 3-4-2 - Expression de G1
  - 3-4-3 - Quelques conclusions

Annexe 3 A - Problème de Lur'e : calcul des divers groupes de coefficients

Annexe 3 B - Problème de Lur'e : calcul de G1

Annexe 3 C - Multiplicateurs des récurrences du 3ème ordre.

1 - INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous étudions la stabilité des cas critiques de deux types de systèmes en nous basant sur les résultats du deuxième chapitre. Le premier de ces deux types couvre les régulateurs non linéaires échantillonnés dont l'étude de la stabilité d'une façon générale porte le nom de problème de Lur'e. Le deuxième type concerne les systèmes à données échantillonnées non linéaires avec un bloqueur d'ordre un. Nous examinerons la stabilité de ces systèmes dans le cas critique caractérisé par la présence de deux multiplicateurs complexes conjugués, de module unité, les autres multiplicateurs ayant tous un module inférieur à l'unité.

2 - REGULATEURS NON LINEAIRES ECHANTILLONNES - PROBLEME DE LUR'E

2-1 - Problème

Le problème de Lur'e consiste à étudier la stabilité, au sens de Ljapunov, des divers types de régulateurs en fonctionnement continu [37, 48] ; la description mathématique de ces régulateurs étant mise sous une forme canonique. Dans le cas de ces régulateurs en fonctionnement discret, la chaîne directe est constituée par :

- un échantillonneur d'ordre zéro, ou échantillonneur seul
- une non linéarité sans mémoire
- et un processus décrit par une fonction de transfert d'ordre supérieur à 2.

La description mathématique de ces régulateurs est constituée par les équations

$$(1)\quad \begin{cases} \underline{u}_{n+1} = A\,\underline{u}_n + \mu f(\sigma_n) \\ \sigma_n = \underline{c}^T u_n \quad ; \; u \in R^m \quad , \; m > 2 , \\ f(\sigma_n) = \gamma \sigma_n + \Psi_2 \sigma_n^2 + \Psi_3 \sigma_n^3 + \dots \end{cases}$$

où : $A = [a_{ij}]$ est une matrice m x m ; $\underline{c} = [c_i]$ un vecteur à m composantes ; μ , γ , $\Psi_2, \Psi_3, \dots$ des scalaires et qui sont, comme A et $\underline{c}$, des données du problème.

Soit $\underline{e}^T = (1, 1, \dots 1)$ vecteur unité à m composantes. Considérons l'équation caractéristique formée par les termes linéaires de $\underline{u}_{n+1}$

$$D(\rho) = A + \mu\gamma \left[\underline{c} \cdot \underline{e}^T\right]^T - \rho I =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} + \mu\gamma \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_m \\ c_1 & \cdots & c_m \\ \vdots & & \vdots \\ c_1 & \cdots & c_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \rho \end{bmatrix} = 0$$

Dans le cas où les valeurs propres ρ_s , $s = 1, \ldots q+2 = m$, sont nulles et distinctes, nous pouvons diagonaliser la matrice formée par la partie linéaire de (1), et obtenons :

$$(2) \quad \begin{cases} v_{n+1}^{(s)} = \rho_s \, \underline{v}_n^{(s)} + \mu \left(\Psi_2 \, \sigma_n^2 + \Psi_3 \, \sigma_n^3 + \ldots \right) \\ \sigma_n = \underline{h}^T \underline{v}_n \quad ; \quad v_n = \underline{k}^T u_n \end{cases}$$

où les vecteur $\underline{h}$ et $\underline{k}$, à m composantes, sont des fonctions connues des éléments de (1).

Etudions plus particulièrement le cas critique caractérisé par les hypothèses suivantes :

a) Deux des valeurs propres de $D(\rho)$ sont complexes conjuguées, et de module égal à 1 :

$$\rho_x = \rho_{q+1} = e^{j\varphi} \quad ; \quad \rho_y = \rho_{q+2} = e^{-j\varphi} \qquad (\varphi \neq 0 \, , \, \varphi \neq \pi)$$

b) Toutes les autres valeurs propres ρ_s , $s = 1, \ldots, q$, sont réelles, et de valeur absolue inférieure à 1

$$|\rho_s| < 1 \quad ; \quad s = 1, \ldots, q$$

Désignons par :

$$\left.\begin{aligned} x &= v^{(q+1)} + j \, v^{(q+2)} \\ y &= v^{(q+1)} - j \, v^{(q+2)} \end{aligned}\right\} \text{ variables conjuguées complexes}$$

$$z^{(s)} = v^{(s)} \quad ; \quad s = 1, \ldots q \quad : \quad \text{variables réelles}$$

nous pouvons écrire la récurrence (2) sous la forme : [65] (Voir Annexe 3 A)

$$(3)\quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n e^{j\varphi} + P_2(x_n, y_n, z_n^{(s)}) + P_3(x_n, y_n, z_n^{(s)}) + \cdots \\ y_{n+1} = y_n e^{-j\varphi} + Q_2(x_n, y_n, z_n^{(s)}) + Q_3(x_n, y_n, z_n^{(s)}) + \cdots \\ z_{n+1}^{(s)} = \rho_s z_n^{(s)} + R_2^{(s)}(x_n, y_n, z_n^{(s)}) + R_3^{(s)}(x_n, y_n, z_n^{(s)}) + \cdots \end{cases}$$

$$s = 1, 2, \ldots, q$$

2-2 - Transformation en cas particulier

Les termes du premier degré en x et y étant absents dans l'expression de $z_{n+1}^{(s)}$ dans (3), nous utilisons la transformation :

$$z^{(s)} = \xi^{(s)} + V_s(x,y)$$

$$(4)\quad V_s(x,y) = V_s^{(2)}(x,y) = M_s x^2 + 2P_s xy + N_s y^2$$

$$s = 1, \ldots, q$$

Pour l'ensemble des q variables z, nous avons à déterminer 3 q coefficients M_s, P_s et N_s. Pour cela, transformons $z_{n+1}^{(s)}$ de (3) :

$$\xi_{n+1}^{(s)} = M_s x_{n+1}^2 + 2P_s x_{n+1} \cdot y_{n+1} + N_s y_{n+1}^2$$

$$= \rho_s \xi_n^{(s)} + \rho_s (M_s x_n^2 + 2P_s x_n y_n + N_s y_n^2) +$$

$$(5)\quad + \mu \Psi_2 \Big[(a^2 x_n^2 + 2ab\, x_n y_n + b^2 y_n^2) + \Big(\sum_{i=1}^{q} \{ h_i (\xi_n^{(i)} + M_i x_n^2 + 2P_i x_n y_n + N_i y_n^2) \} \Big) \times (2a x_n + 2b y_n) + \Big(\sum_{i=1}^{q} \{ h_i (\xi_n^{(i)} + M_i x_n^2 + 2P_i x_n y_n + N_i y_n^2) \} \Big)^2 \Big] + \mu \Psi_3 [\ldots] +$$

$$s = 1, \ldots, q.$$

La détermination des coefficients M_s, P_s et N_s se fait par identification des termes du second degré en x^2, $x_n y_n$ et y_n^2 et par annulation des coefficients de ces termes. La variable ξ_n n'intervenant pas dans $V_s^{(2)}(x_n, y_n)$ les calculs se trouvent un peu simplifiés. Posons $u = e^{j\varphi}$, les termes du premier membre de (5) s'écrivent : $(s = 1, \ldots, q)$

$$M_s x_{n+1}^2 = M_s (x_n u + P_2 + P_3 + \cdots)^2 = M_s x_n^2 u^2 + T_\xi^2 + T^3 + \cdots$$

$$2P_s x_{n+1} y_{n+1} = 2P_s (x_n u + P_2 + P_3 + \cdots)((y_n/u) + Q_2 + Q_3 + \cdots)$$

$$= 2P_s x_n y_n + T_\xi^2 + T^3 + \cdots$$

$$N_s y_{n+1}^2 = N_s ((y_n/u) + Q_2 + Q_3 + \cdots)^2 = N_s \frac{y_n^2}{u^2} + T_\xi^2 + T^3 + \cdots$$

où :

T_ξ^2 : termes du second degré ayant en facteur au moins l'une des variables $\xi_n^{(s)}$, $s = 1, \ldots, q$

T^3 : termes du 3ème degré en x_n, y_n et $\xi_n^{(s)}$, $s = 1, \ldots, q$.

L'équation (5) devient :

$$\xi_{n+1}^{(s)} + M_s x_n^2 u^2 + 2 P_s x_n y_n + N_s \frac{y_n^2}{u^2} =$$

$$= \rho_s \xi_n^{(s)} + \rho_s (M_s x_n^2 + 2 P_s x_n y_n + N_s y_n^2) + \tag{6}$$

$$+ \mu \psi_2 (a^2 x_n^2 + 2ab\, x_n y_n + b^2 y_n^2) + T_\xi^2 + T^3 + \ldots$$

$$(s = 1, \ldots, q)$$

Les termes en x_n^2 , y_n^2 et $x_n y_n$ s'annulent si les coefficients M_s, P_s et N_s ont les valeurs suivantes

$$M_s = \mu \psi_2 \frac{a^2}{u^2 - \rho_s} \; ; \quad 2P_s = \mu \psi_2 \frac{2ab}{1 - \rho_s} \; ; \quad N_s = \mu \psi_2 \frac{b^2}{u^{-2} - \rho_s} \tag{7}$$

$$s = 1, \ldots, q.$$

auquel cas l'expression de $\xi_{n+1}^{(s)}$ devient :

$$\xi_{n+1}^{(s)} = \rho_s \xi_n^{(s)} + T_\xi^2 + T^3 + \ldots \qquad s = 1, \ldots, q. \tag{8}$$

2-3 - Etablissement de l'expression de G_1

L'expression de G_1 s'écrit :

$$G_1 = u \overline{b}_{33} + \frac{\overline{a}_{32}}{u} + \overline{b}_{21} \overline{a}_{23} + \overline{b}_{22} \overline{a}_{22} + \overline{b}_{23} \overline{a}_{21} + 3\varphi_{31} u^2 \overline{a}_{23} \tag{9}$$

$$+ \varphi_{32} (2 \overline{a}_{2\phi} + u^2 \overline{b}_{23}) + \varphi_{33} \left(\frac{\overline{a}_{21}}{u^2} + 2 \overline{b}_{2\phi} \right) + \frac{3}{u^2} \varphi_{34} \overline{b}_{21}$$

2 2

avec

$$\varphi_{31} = \frac{u}{1-u^3}\,\bar{b}_{21} \qquad \varphi_{32} = \frac{u^2\bar{b}_{21} + \bar{a}_{21}}{u\,(1-u)}$$

(10)

$$\varphi_{33} = \frac{u^2\,\bar{b}_{23} + \bar{a}_{22}}{u-1} \qquad \varphi_{34} = \frac{u^2\;\bar{a}_{23}}{u^3-1}$$

Après avoir groupé par paire les termes ou expressions complexes conjugués, nous obtenons

$$G_1 = \left(u\bar{b}_{33} + \frac{\bar{a}_{32}}{u}\right) + \left(\bar{b}_{21}\,\bar{a}_{23} + \bar{b}_{23}\,\bar{a}_{21}\right) + \left(\bar{b}_{22}\,\bar{a}_{22}\right)$$

(11)

$$+ 3\left(\varphi_{31}\,u^2\,\bar{a}_{23} + \varphi_{34}\,\frac{\bar{b}_{21}}{u^2}\right) + 2\left(\varphi_{32}\,\bar{a}_{22} + \varphi_{33}\,\bar{b}_{22}\right)$$

$$+ \left(\varphi_{33}\,\bar{a}_{21}\,u^{-2} + \varphi_{32}\,\bar{b}_{23}\,u^2\right)$$

(12)

$$\left(\varphi_{31} = \frac{u}{1-u^3}\,\bar{b}_{21} \quad ; \quad \varphi_{34} = \frac{u^{-1}}{1-u^{-3}}\,\bar{a}_{23}\right)$$

$$\left(\varphi_{32} = \frac{\bar{b}_{22}}{u^{-1}-1} + \frac{\bar{a}_{21}\,u^{-1}}{1-u} \; ; \quad \varphi_{33} = \frac{\bar{a}_{22}}{u-1} + \frac{u\,\bar{b}_{23}}{1-u^{-1}}\right)$$

avec $u = e^{j\varphi}$, $\bar{a}_{21} = \bar{b}_{23}^{*}$, $\bar{a}_{22} = \bar{b}_{22}^{*}$, $\bar{a}_{23} = \bar{b}_{21}^{*}$, $\bar{a}_{32} = \bar{b}_{33}^{*}$.

L'expression finale, en fonction des données du problème μ, ψ_2, ψ_3, h_s, ρ_s, h_x, h_y est la suivante : (expression réelle, voir les détails des calculs en Annexe 3 B) :

$$G_1 = \frac{3}{8}\mu\Psi_3(h_x^2+h_y^2)\left[\cos\varphi(h_x+h_y)+\sin\varphi(h_x-h_y)\right]$$

$$+\mu^2\Psi_2^2(h_x^2+h_y^2)^2\left\{\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{q}h_s\left(\frac{2(h_x+h_y)}{1-\rho_s}+\frac{h_x(\cos 2\varphi-\rho_s)+h_y\sin 2\varphi}{(\cos 2\varphi-\rho_s)^2+\sin^2 2\varphi}\right)\right.$$

(13)
$$+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\frac{\cos 3\varphi-1}{(\cos 3\varphi-1)^2+\sin^2 3\varphi}+\frac{1}{8\cos\varphi}\left[1+\right.$$

$$\frac{1}{2(h_x^2+h_y^2)}(2h_xh_y(\cos 2\varphi-\cos\varphi)+(h_x^2-h_y^2)(\sin 2\varphi-\sin\varphi)\left.\right]$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\frac{h_xh_y}{h_x^2+h_y^2}(\cos 3\varphi-\cos 2\varphi)+\sin 3\varphi-\sin 2\varphi}{(\cos 3\varphi-\cos 2\varphi)^2+(\sin 3\varphi-\sin 2\varphi)^2}\right\}$$

2-4 - Quelques conclusions

L'expression de G_1 dans (13) permet de déterminer son signe à partir des données du problèmes : $u = e^{j\varphi}$, μ, Ψ_2, Ψ_3, ρ_i, h_i ; $i = 1, \dots q$, h_x et h_y. Comme nous l'avons vu au chapitre 2 :

si $G_1 < 0$, le système est stable

Si $G_1 > 0$, le système est instable

Considérons le cas, pratiquement très fréquent, où la caractéristique $f(\sigma)$ est symétrique par rapport à l'origine, c'est-à-dire que $f(\sigma)$ est de la forme

$$f(\sigma) = \gamma\sigma + \Psi_3\sigma^3 + \dots$$

Si le coefficient γ est tel que nous soyons dans le cas critique considéré, l'expression de G_1 devient extrèmement simple : ($\Psi_2 = 0$ dans (13))

(14) $$G_1 = \frac{3}{8}\mu\Psi_3(h_x^2+h_y^2)\left[\cos\varphi(h_x+h_y)+\sin\varphi(h_x-h_y)\right]$$

Admettons $\mu > 0$, le signe de G_1 dans (14) dépend donc :

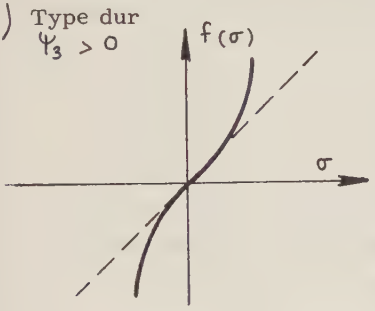
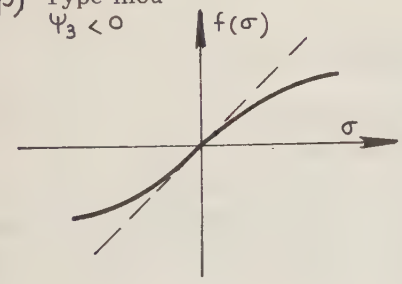
- d'une part de celui de Ψ_3
- et d'autre part de celui de :

(15) $$m = \cos\varphi(h_x+h_y)+\sin\varphi(h_x-h_y)$$

c'est-à-dire que :

(16) $$\operatorname{sign} G_1 = \operatorname{sign}\Psi_3 \cdot \operatorname{sign} m.$$

Le signe de m dépend lui-même de $m_1 = \cos\varphi\,(h_x + h_y)$ et de $m_2 = \sin\varphi\,(h_x - h_y)$
Les quatre sont résumés ci-dessous

Caractéristique non linéaire	Signe de m $m = m_1 + m_2$	Signe de G_1
α) Type dur $\psi_3 > 0$ 	α_1) $m < 0$ $\psi_3 . m < 0$	$G_1 < 0$ stable
	α_2) $m > 0$ $\psi_3 . m > 0$	$G_1 > 0$ instable
β) Type mou $\psi_3 < 0$ 	β_1) $m < 0$ $\psi_3 . m > 0$	$G_1 > 0$ instable
	β_2) $m > 0$ $\psi_3 . m < 0$	$G_1 < 0$ stable

Remarquons que, dans ce cas particulier, le signe de G_1 et par suite, la stabilité du système, en dehors du coefficient ψ_3 qui caractérise la non linéarité, ne dépend que des paramètres φ, h_x et h_y, tous relatifs aux deux variables y et x. Les autres paramètres, tels que h_i et $\gamma\ p_i$, $i = 1, \ldots, q$. n'interviennent pas. Physiquement, l'expression de G_1 dans (14) appelle l'interprétation suivante

Les paramètres de G_1 dans (14) sont de trois provenances :

a) μ et ψ_3 caractérisant la non linéarité de la chaîne directe

b) l'angle φ des deux multiplicateurs $p_x = e^{j\varphi}$, $p_y = e^{-j\varphi}$ caractérise l'effet des paramètres linéaires relatifs aux deux variables x et y de la chaîne direct

c) h_x et h_y caractérisent les gains en retour des variables x et y :

(17) $\sigma = h_x x + h_y y + h_i\ z^{(i)}$ $\qquad i = 1, \ldots q.$

Pour une non-linéarité $(\mu \psi_3)$ donnée, la stabilité dépend d'un dosage adéquat des gains en retour h_x et h_y par rapport à l'angle φ.

Pour illustration considérons la récurrence

$$r_{n+1} = r_n \cos\varphi - s_n \sin\varphi + D.\sigma_n^3$$

$$\alpha) \quad s_{n+1} = r_n \sin\varphi + s_n \cos\varphi + D.\sigma_n^3$$

$$z_{n+1} = 0{,}8\, z_n + D.\sigma_n^3$$

avec

$$\sigma_n = h_x r_n + h_y s_n - 0{,}1\, z_n$$

du même type que (2)

L'expression de G_1 relative à cette récurrence est :

$$G_1 = D\,(h_x^2 + h_y^2)\left[\cos\varphi\,(h_x + h_y) + \sin\varphi\,(h_x - h_y)\right]$$

Comme $h_x^2 + h_y^2 > 0$ le signe de G_1 est

$$\text{sign } G_1 = \text{sign } D \,.\, \text{sign } m$$

avec

$$m = \cos\varphi\,(h_x + h_y) + \sin\varphi\,(h_x - h_y).$$

Un programme de calcul numérique a été préparé pour calculer le point (r, s, z) de (α) Les résultats suivants sont obtenus

Données	Prévisions	Résultats des calculs numériques
1er cas $D = 0{,}2$ $h_x = 0{,}5$ $h_y = 0{,}2$ Cos φ = - 0,707 Sin φ = 707 φ = 135°	m = - 2,808 m < 0 D > 0 donc $G_1 < 0$ cas prévu stable	cas vérifié stable
2ème cas $D = 0{,}2$ $h_x = 0{,}2$ $h_y = 0{,}5$ Cos φ = 0,994 Sin φ = 0,05 φ = 6°	m = 0,6808 m > 0 D > 0 $G_1 > 0$ Prévision : instable	cas vérifié instable

3 - SYSTEME ECHANTILLONNE NON LINEAIRE AVEC BLOQUEUR D'ORDRE UN

3-1 - Description du système et mise en équation

Considérons le système dont le diagramme fonctionnel est indique sur la figure 3-1 (exemples similaires traités dans 27 et 28). Les caractéristiques de ce système sont :

Référence	$r = 0$
Période d'échantillonnage	T (sec)
Fonction de transfert du bloqueur d'ordre un	$B_1(s)$
Caractéristique non linéaire :	$f(\omega) = k\omega + p\omega^2 + q\omega^3 + \ldots$
Fonction de transfert du processus :	$G(s) = \dfrac{1}{s(1+\tau s)}$
Constante de temps	τ (sec)

Désignons par θ la valeur du temp t entre les instants nT et (n+1)T. Fixons θ telle que : (figure 3-2)

θ = 0 à l'instant t = nT
θ = T à l'instant t = (n+1) T

Le bloqueur d'ordre un utilise l'écart connu $\Delta x = x_n - x_{n-1}$, et extrapole la valeur de x_n entre les instants nT et (n+1)T en lui ajoutant la quantité $\Delta x = \theta/T$, le rapport θ/T variant entre 0 et 1 entre les instants nT et (n+1)T. Son équation s'écrit donc : [41]

$$(18) \qquad \omega(\theta) = u_n + \frac{u_n - u_{n-1}}{T}\theta = -\left(x_n + \frac{x_n - x_{n-1}}{T}\theta\right)$$

L'équation de la chaîne directe s'écrit

$$(19) \qquad s(1+\tau s)x = f(\omega)$$

Désignons

$$(20) \qquad y = \frac{dx}{d\theta} = \dot{x}$$

L'équation (19) devient

$$(21) \qquad \tau\dot{y} + y = f(\omega)$$

En utilisant les paramètres et variables réduits :

$$\bar{t} = \frac{t}{\tau} \; ; \; \bar{T} = \frac{T}{\tau} \; ; \; \bar{\theta} = \frac{\theta}{\tau} \; ; \; \bar{x} = \frac{x}{\tau} \; ; \; \bar{\omega} = \frac{\omega}{\tau}$$

$$\bar{k} = k\tau \; ; \; \bar{p} = p\tau^2 \; ; \; \bar{q} = q\tau^3$$

nous avons :

$$d\theta = \tau . d\bar{\theta} \; ; \; dx = \tau . d\bar{x}$$

$$y = dx/d\theta = d\bar{x}/d\bar{\theta} = \bar{y}$$

Par suite, les équations (20) et (21) deviennent

(23) $$\dot{\bar{x}} = \bar{y}$$

(24) $$d\bar{y}/d\bar{\theta} + \bar{y} = f(\bar{\omega}) .$$

Pour simplifier l'écriture, nous supprimerons les barres.

3-2 - Etablissement des récurrences associées

Nous allons établir les récurrences associées aux équations (23) et (24) dans 4 cas, en prenant dans $f(\omega)$ successivement un, deux, trois termes et le terme général. Le principe de l'établissement sera illustré dans le premier cas où nous prenons $f(\omega) = k\omega$.

3-2-1 - Cas où $f(\omega) = k(\omega)$

Introduisons la variable z_n telle que :

$$z_n = x_n - x_{n-1}$$

L'expression de $f(\omega)$ devient :

$$f(\omega) = - k x_n - k \frac{\theta}{T} z_n$$

1° - Calcul de y_{n+1}

L'équation (24) s'écrit :

(25) $$\dot{y} + y = - k x_n - \frac{k\theta}{T} z_n$$

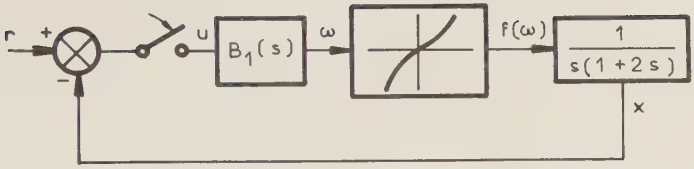


Figure 3-1 - Un système échantillonné non linéaire avec bloqueur d'ordre un

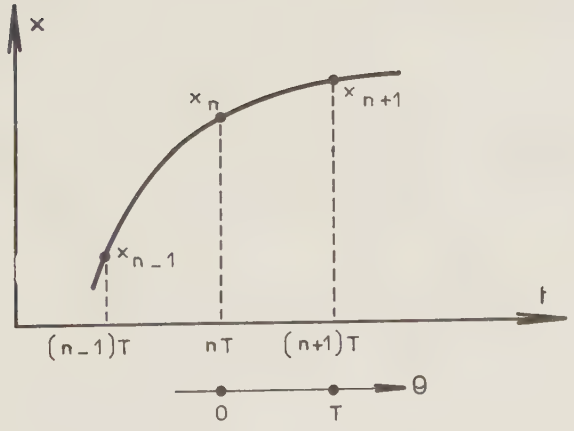


Figure 3-2 - Définition de θ et relation entre θ et les indices n

La solution sans second membre est du type exponentiel $Ce^{-\theta}$, tandis que la solution particulière correspondant au second membre est du type $\alpha_0 + \alpha_1 \theta$ Soit donc la solution

(26) $$y(\theta) = Ce^{-\theta} + \alpha_0 + \alpha_1 \theta$$

et déterminons les valeurs de C, α_0 et α_1 par identification. De (26) nous déduisons :

$$\dot{y} = -Ce^{-\theta} + \alpha_1$$

Par suite :

où $$\dot{y} + y = -Ce^{-\theta} + \alpha_1 + Ce^{-\theta} + \alpha_0 + \alpha_1 \theta$$

(26 a) $$\dot{y} + y = (\alpha_0 + \alpha_1) + \alpha_1 \theta$$

Par identification des coefficients des termes en θ, seconds membres de (25) et de (26 a) :

$$\alpha_1 = -\frac{k}{T} z_n$$

$$\alpha_0 = -k x_n - \alpha_1 = -k x_n + \frac{k}{T} z_n$$

Considérons les instants $t = nT$ ($\theta = 0$) et $t = (n+1)T$ ($\theta = T$). Au temps $t = nT$, nous avons

$$y(nT) = y_n \quad , \quad x(nT) = x_n$$

$$y_n = C + \alpha_0 \qquad \text{d'où :} \quad C = y_n - \alpha_0$$

et au temps $t = (n+1)\,T$:

$$y[(n+1)T] = y_{n+1} \quad , \quad x[(n+1)T] = x_{n+1}$$

(27) $$y_{n+1} = (y_n - \alpha_0)\, e^{-T} + \alpha_0 + \alpha_1 T$$

$$= k(e^{-T} - 1) x_n + e^{-T} y_n + \frac{k}{T}(1 - T - e^{-T}) z_n$$

2° - Calcul de x_{n+1}

Tenant compte de (23) et de (26) :

$$x = \int \dot{y}\, d\theta = - Ce^{-\theta} + \alpha_0 \theta + \frac{1}{2} \alpha_1 \theta^2 + R$$

où R est une constante à déterminer .

Au temps $t = nT$, $\theta = 0$, $x(nT) = x_n$

$$x_n = - C + R \qquad \text{d'où : } R = x_n + C = x_n + y_n - \alpha_0$$

Au temps $t = (n+1)\,T$, $\theta = T$, $x[(n+1)T] = x_{n+1}$

$$x_{n+1} = - Ce^{-T} + \alpha_0 T + \frac{1}{2} \alpha_1 T^2 + R$$

$$= - e^{-T} y_n + (e^{-T} + T - 1)(- k x_n - \alpha_1) +$$

(28)

$$\frac{1}{2} T^2 \left(- \frac{k}{T} z_n\right) + x_n + y_n$$

$$x_{n+1} = [1 + k(1 - T - e^{-T})]\, x_n + (1 - e^{-T})\, y_n$$

$$- \frac{k}{T} \left[\frac{T^2}{2} + 1 - T - e^{-T}\right] z_n$$

3° - Expression de la récurrence

En définissant les paramètres r_i suivants :

$$r_0 = - e^{-T}$$

$$r_1 = 1 - e^{-T}$$

$$r_2 = 1 - T - e^{-T}$$

$$r_3 = 1 - T + \frac{T^2}{2!} - e^{-T}$$

$$r_4 = 1 - T + \frac{T^2}{2!} - \frac{T^3}{3!} - e^{-T}$$

$$r_5 = 1 - T + \frac{T^2}{2!} - \frac{T^3}{3!} + \frac{T^4}{4!} - e^{-T}$$

$$\vdots$$

$$r_n = D_n(e^{-T}) - e^{-T}$$

$D_n(e^{-T})$ désignant le développement de e^{-T} pris jusqu'au n-ième terme.
D'après (27), (28) :

$$x_{n+1} = (1 + k r_2)\, x_n + r_1 y_n - \frac{k}{T} r_3 z_n$$

(RI) $$y_{n+1} = (-r_1 k)\, x_n - r_0 y_n + \frac{k}{T} r_2 z_n$$

$$z_{n+1} = k r_2 x_n + r_1 y_n - \frac{k}{T} r_3 z_n$$

3-2-2 - Cas où $f(\omega) = k\omega + p\omega^2$

Nous avons :

$$f(\omega) = -k\left(x_n + \frac{\theta}{T} z_n\right) + p\left(x_n + \frac{\theta}{T} z_n\right)^2$$

$$\dot{y} + y = -k x_n + p x_n^2 + \theta\left(-\frac{k}{T} z_n + \frac{2p}{T} x_n z_n\right) + \frac{p z_n^2}{T^2}\theta^2$$

$$y = Ce^{-\theta} + \alpha_0 + \alpha_1 \theta + \alpha_2 \theta^2$$

$$\dot{y} = -Ce^{-\theta} + \alpha_1 + 2\alpha_2 \theta$$

$$\dot{y} + y = \alpha_0 + \alpha_1 + (\alpha_1 + 2\alpha_2)\theta + \alpha_2 \theta^2$$

En procédant comme précédemment et en utilisant les mêmes paramètres r_i, nous obtenons

$$x_{n+1} = (1 + k r_2) x_n + r_1 y_n - \frac{k}{T} r_3 z_n - p\left[r_2 x_n^2 - \frac{2}{T} r_3 x_n z_n + \frac{2}{T^2} r_4 z_n^2\right]$$

(R II) $$y_{n+1} = -k r_1 x_n - r_0 y_n + k \frac{r_3}{T} z_n + p\left[r_1 x_n^2 - \frac{2}{T} r_2 x_n z_n + \frac{2}{T^2} r_3 z_n^2\right]$$

$$z_{n+1} = k r_2 x_n + r_1 y_n - \frac{k}{T} r_3 z_n - p\left[r_2 x_n^2 - \frac{2}{T} r_3 x_n z_n + \frac{2}{T^2} r_4 z_n^2\right]$$

Notons que le coefficient p est mis en facteur par rapport aux termes du second degré.

3-2-3 - Cas où $f(\omega) = k\omega + p\omega^2 + q\omega^3$

Nous avons :

$$f(\omega) = -k\left(x_n + \frac{\theta}{T} z_n\right) + p\left(x_n + \frac{\theta}{T} z_n\right)^2 - q\left(x_n + \frac{\theta}{T} z_n\right)^3$$

$$= -k x_n + p x_n^2 - q x_n^3 + \frac{z_n}{T}\left(-k + 2 x_n p - 3 q x_n^2\right)\theta$$

$$+ \frac{z_n^2}{T}\left(p - 3 q x_n\right)\theta^2 - q \frac{z_n^3}{T^3}\theta^3$$

$$y = Ce^{-\theta} + \alpha_0 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2 + \alpha_3\theta^3$$

$$\dot{y} = -Ce^{-\theta} + \alpha_1 + 2\alpha_2\theta + 3\alpha_3\theta^2$$

$$y + \dot{y} = (\alpha_0 + \alpha_1) + (\alpha_1 + 2\alpha_2)\theta + (\alpha_2 + 3\alpha_3)\theta^2 + \alpha_3\theta^3$$

En procédant comme précédemment, et en utilisant les mêmes r_i, nous obtenons :

$$x_{n+1} = (1 + kr_2)x_n + r_1 y_n - \frac{kr_3}{T} z_n - p\left[r_2 x_n^2 - \frac{2r_3}{T} x_n z_n + \frac{2r_4}{T^2} z_n^2\right]$$
$$+ q\left[r_2 x_n^3 - \frac{3r_3}{T} x_n^2 z_n + \frac{6r_4}{T^2} x_n z_n^2 - \frac{6r_5}{T^3} z_n^3\right]$$

$$y_{n+1} = -kr_1 x_n - r_0 y_n + \frac{kr_2}{T} z_n + p\left[r_1 x_n^2 - \frac{2r_2}{T} x_n z_n + \frac{2r_3}{T^2} z_n^2\right]$$
(R III)
$$- q\left[r_1 x_n^3 - \frac{3r_2}{T} x_n^2 z_n + \frac{6r_3}{T^2} x_n z_n^2 - \frac{6r_4}{T^3} z_n^3\right]$$

$$z_{n+1} = kr_2 x_n + r_1 y_n - \frac{kr_3}{T} z_n - p\left[r_2 x_n^2 - \frac{2r_3}{T} x_n z_n + \frac{2r_4}{T^2} z_n^2\right]$$
$$+ q\left[r_2 x_n^3 - \frac{3r_3}{T} x_n^2 z_n + \frac{6r_4}{T^2} x_n z_n^2 - \frac{6r_5}{T^3} z_n^3\right]$$

Notons que les coefficients p et q sont respectivement mis en facteur par rapport aux termes du 2ème et du 3ème degré.

3-2-4 - Cas où $f(\omega) = s_i\,\omega^i$, $(i = 1, \ldots)$

Nous prenons une expression de $f(\omega)$ avec trois termes écrits avec des indices et exposants généraux $\left(C_m^m = C_m^0 = 1\ ,\ C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}\right)$

$$f(\omega) = s_1\omega^{i_1} + s_2\omega^{i_2} + s_3\omega^{i_3}$$
$$= (-1)^1 s_1\left(C_1^0 x_n + C_1^1 \frac{z_n}{T}\theta\right)$$
$$+ (-1)^2 s_2\left(C_2^0 x_n^2 + C_2^1 x_n \frac{z_n}{T}\theta + C_2^2 \frac{z_n^2}{T^2}\theta^2\right)$$
$$+ (-1)^3 s_3\left(C_3^0 x_n^3 + C_3^1 x_n^2 \frac{z_n}{T}\theta + C_3^2 x_n \frac{z_n^2}{T^2}\theta^2 + C_3^3 \frac{z_n^3}{T^3}\theta^3\right)$$

Comme précédemment, et en utilisant les mêmes r_i nous aboutissons à la formule générale :

$$y = Ce^{-\theta} + \alpha_0 + \alpha_1 \theta^{i_1} + \alpha_2 \theta^{i_2} + \alpha_3 \theta^{i_3}$$

$$\dot{y} = -Ce^{-\theta} + i_1 \alpha_1 + i_2 \alpha_2 \theta^{i_1} + i_3 \alpha_3 \theta^{i_2}$$

$$y + \dot{y} = \alpha_0 + i_1 \alpha_1 + (\alpha_1 + i_2 \alpha_2)\theta^{i_1} + (\alpha_2 + i_3 \alpha_3)\theta^{i_2} + \alpha_3 \theta^{i_3}$$

Et en procédant comme précédemment, et en utilisant les mêmes r_i, nous aboutissons à la formule générale :

$$x_{n+1} = r_1 y_n + x_n + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j s_j \sum_{m=0}^{j} (-1)^{m+1} m!\, C_j^m \frac{r_{m+2}}{T^m} x_n^{j-m} z_n^m$$

(Rg)
$$y_{n+1} = r_0 y_n + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j s_j \sum_{m=0}^{j} (-1)^m m!\, C_j^m \frac{r_{m+1}}{T^m} x_n^{j-m} z_n^m$$

$$z_{n+1} = r_1 y_n + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j s_j \sum_{m=0}^{j} (-1)^{m+1} m!\, C_j^m \frac{r_{m+2}}{T^m} x_n^{j-m} z_n^m$$

3-3 - Stabilité locale

Dans ce paragraphe, nous analysons la stabilité locale du système représenté sur la figure 3-1, en utilisant la partie linéaire des récurrences R I, R II, RIII ou Rg.

Pour cela, nous étudions, dans le plan des paramètres k et T :

a) le domaine de stabilité locale, correspondant à $|S_i| \leq 1$, $i = 1,2,3$, les S_i étant les multiplicateurs

b) le domaine d'existence des multiplicateurs complexes, en préparation de l'étude des cas critiques.

De l'une des récurrences R I à Rg, nous déduisons l'équation de multiplicateurs

(29)
$$\begin{bmatrix} 1 + k r_2 - S & r_1 & -k \frac{r_3}{T} \\ -k r_1 & -r_0 - S & +k \frac{r_2}{T} \\ k r_2 & r_1 & -k \frac{r_3}{T} - S \end{bmatrix} = 0$$

où :

(30)
$$S^3 - \sigma S^2 + \Delta S - \pi = 0$$

avec :

$$\sigma = 1 + k r_2 - \frac{k r_3}{T} - r_0$$

$$\Delta = \frac{k r_0 r_3}{T} - (1 + k r_2)(r_0 + \frac{k r_3}{T})$$

$$\pi = \frac{k}{T}\left[r_0 r_3 (1 + k r_2) - k r_1 (r_2^2 - r_1 r_3)\right.$$

D'après l'Appendice 3 C, les conditions pour avoir $|S| \leq 1$ sont :

A : $|\pi| \leq 1$ ou $-1 \leq \frac{k}{T}\left[r_0 r_3 (1 + k r_2) - k r_1 (r_2^2 - r_1 r_3)\right] \leq 1$

B : $\pi^2 - 1 - \sigma \pi + \Delta \leq 0$

C : $1 - \sigma + \Delta - \pi \geqslant 0$ ou

$$-k r_2 (1 + r_0) - \frac{k^2}{T}(r_2 r_3 + r_0 r_2 r_3 - r_1 r_2^2 + r_1^2 r_3) \geqslant 0$$

D : $1 + \sigma + \Delta + \pi \geqslant 0$ ou

$$2 - 2 r_0 + k (1 - r_0)(r_2 - \frac{2 r_3}{T}) - \frac{k^2}{T}\left(r_2 r_3 - r_0 r_2 r_3 + \right.$$
$$\left. + r_1 r_0^2 - r_1^2 r_3\right) \geqslant 0$$

Pour avoir des multiplicateurs complexes, il faut satisfaire à la condition

E : $\Delta^2 (4\Delta - \sigma^2) - \pi (-27\pi + 18 \sigma \Delta - 4 \sigma^3) > 0$

Etant donné le complexité des expressions il est difficile de trouver des méthodes simples de test de signes. Finalement, nous avons établi des programmes numériques calculant directement les conditions A à E pour des valeurs données de T et k. Les résultats des calculs nous permettent de tirer les conclusions suivantes

1° - Zone stable ($|S| \leq 1$) (figure 3-3)

Gamme des valeurs des paramètres

k de 0, 1 à 100 ; T de 0, 01 à 10

Dans cette gamme :

Condition A satisfaite à gauche
Condition B satisfaite à gauche

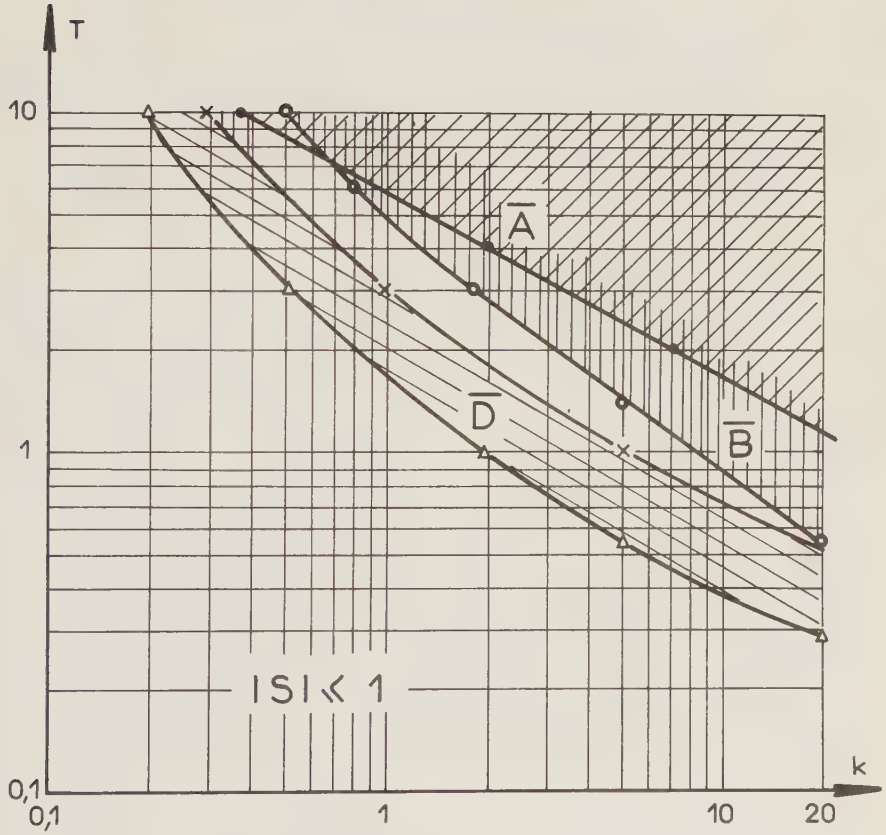


Figure 3-3 - Zone des multiplicateurs de module ≤ 1

Condition C toujours satisfaite
Condition D non satisfaite dans une bande centrale

Il existe donc un domaine à gauche, pour les petites valeurs de T, où nous avons $|S| \leqslant 1$

2° - Zone des S complexes (figure 3-4)

La condition E est satisfaite dans la partie centrale du plan T - k. D'autre part, cette zone des S complexes a une partie commune avec la zone $|S| \leqslant 1$ de la figure 3-3. Il existe donc des multiplicateurs complexes de module $\leqslant 1$.

3-4 - Stabilité d'un cas critique

3-4-1 - Conditions sur les paramètres k et T

Dans le cas critique considéré, les trois multiplicateurs sont :

$$S_1 = e^{j\varphi} \qquad S_2 = e^{-j\varphi} \; ; \quad S_3 = \rho \quad (\varphi \neq 0, \varphi \neq \pi, |\rho| < 1)$$

Leurs produits et sommes sont alors :

$$\sigma = S_1 + S_2 + S_3 = 2\cos\varphi + \rho$$
$$\Delta = S_1 S_2 + (S_1 + S_2)\rho = 1 + 2\cos\varphi \cdot \rho$$
$$\pi = S_1 S_2 S_3 = \rho$$

Pour que le cas critique existe il faut que les paramètres k et T satisfassent aux deux conditions suivantes (conditions A et E du paragraphe précédent)

(31) 1° $$|\rho| = \pi = \left| \frac{k}{T} \left[r_0 r_3 (1 + k r_2) - k r_1 (r_2^2 - r_1 r_3) \right] \right| < 1$$

(32) 2° $$\Delta^2 (4\Delta - \sigma^2) - \pi (-27\pi + 18\sigma\Delta - 4\sigma^3) > 0$$

En remplaçant Δ, σ et π par leur valeur, (32) devient :

(33)
$$(1 + 2\rho\cos\varphi)^2 \left[4(1 + 2\rho\cos\varphi) - (2\cos\varphi + \rho)^2 \right]$$
$$- \rho \left[-27\rho + 18(2\cos\varphi + \rho)(1 + 2\rho\cos\varphi) - 4(2\cos\varphi + \rho)^3 \right] > 0$$

qui, après quelques calculs simples, devient :

(34) $$(\cos^2\varphi - 1) \left[-4(\rho^2 + 1)^2 + 8\rho\cos\varphi (2 + \rho\cos\varphi + 2\rho^2) \right] > 0$$

La relation (34) montre que la condition de complexité des multiplicateurs S_1, S_2 ne peut pas être remplie si $\varphi = K\pi$, K entier. Les couples de valeurs k - T qui satisfont à la condition (31) sont montrés sur la figure 3-3 , ce sont les points de la surface non couverts par A. Tous ces points ne correspondent pas aux multiplicateurs complexes. Il faut en plus, pour une valeur donnée de φ que la condition (32) soit satisfaite. Les calculs montrent qu'il existe des zones du plan k-T où les deux conditions sont satisfaites simultanément (figure 3-4).

3-4-2 - Expression de G_1

Nous considérons le cas où $f(\omega) = k\omega + p\omega^2 + q\omega^3$ Pour faciliter la dérivation des coefficients, nous utiliserons les symboles utilisés dans [27] pour réécrire la récurrence R III (r pour x, s pour y, r, s, z : variables réelles)

$$
\begin{aligned}
r_{n+1} &= (1 + kr_2)r_n + r_1 s_n - \frac{kr_3}{T} z_n - p\left[r_2 r_n^2 - \frac{2r_3}{T} r_n z_n + \right. \\
&\left. + \frac{2r_4}{T^2} z_n^2\right] + q\left[r_2 r_n^3 - \frac{3r_3}{T} r_n^2 z_n + \frac{6r_4}{T^2} r_n z_n^2 - \frac{6r_5}{T^3} z_n^3\right] \\
s_{n+1} &= -kr_1 r_n - r_0 s_n + \frac{kr_2}{T} z_n + p\left[r_1 r_n^2 - \frac{2r_2}{T} r_n z_n + \frac{2r_3}{T^2} z_n^2\right] - \\
&- q\left[r_1 r_n^3 - \frac{3r_2}{T} r_n^2 z_n + \frac{6r_3}{T^2} r_n z_n^2 - \frac{6r_4}{T^3} z_n^3\right] \qquad (35) \\
z_{n+1} &= kr_2 r_n + r_1 s_n - \frac{kr_3}{T} z_n - p\left[r_2 r_n^2 - \frac{2r_3}{T} r_n z_n + \frac{2r_4}{T^2} z_n^2\right] \\
&+ q\left[r_2 r_n^3 - \frac{3r_3}{T} r_n^2 z_n + \frac{6r_4}{T^2} r_n z_n^2 - \frac{6r_5}{T^3} z_n^3\right]
\end{aligned}
$$

Désignons cette récurrence par :

$$
\begin{aligned}
r_{n+1} &= (1 + kr_2)r_n + r_1 s_n - \frac{kr_3}{T} z_n + R_2(r_n, s_n, z_n) + R_3(r_n, s_n, z_n) \\
s_{n+1} &= -kr_1 r_n - r_0 s_n + \frac{kr_2}{T} z_n + S_2(r_n, s_n, z_n) + S_3(r_n, s_n, z_n) \qquad (36) \\
z_{n+1} &= kr_2 r_n + r_1 s_n - \frac{kr_3}{T} T + Z_2(r_n, s_n, z_n) + Z_3(r_n, s_n, z_n)
\end{aligned}
$$

où $R_2 = Z_2$, $R_3 = Z_3$

Tout d'abord, nous diagonalisons la partie linéaire de cette récurrence par rapport aux trois multiplicateurs $e^{j\varphi}$, $e^{-j\varphi}$ et ρ . Nous utiliserons deux variables complexes x et y transformées de r et s par :

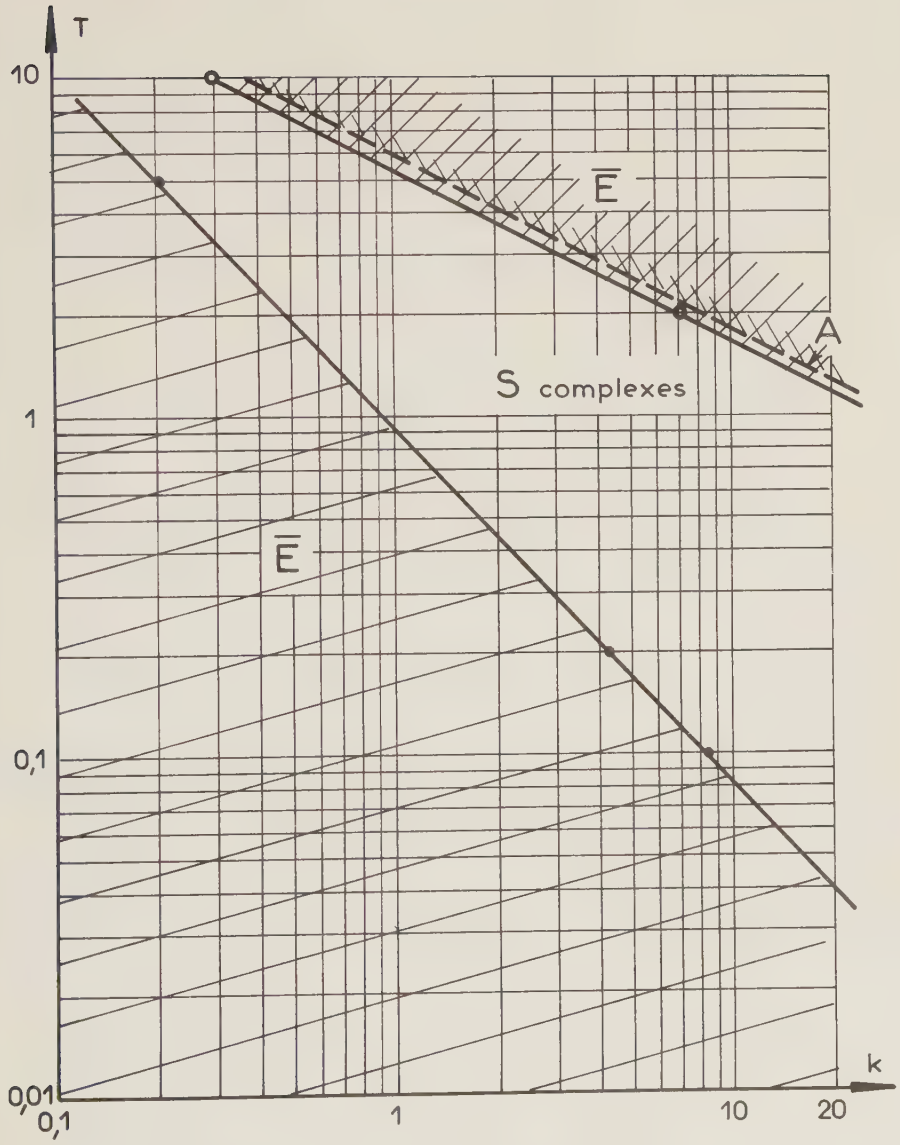


Figure 3-4 - Zone des multiplicateurs complexes S_c.

(37)
$$\left.\begin{aligned} x &= r + js \\ y &= r - js \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} r &= 0{,}5\,(x+y) \\ s &= -0{,}5j\,(x-y) \end{aligned}\right.$$

La nouvelle forme de la récurrence est :

(38)
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n e^{j\varphi} + P_2(x_n, y_n, z_n) + P_3(x_n, y_n, z_n) \\ y_{n+1} &= y_n e^{-j\varphi} + Q_2(x_n, y_n, z_n) + Q_3(x_n, y_n, z_n) \\ z_{n+1} &= \rho z_n + P_2(x_n, y_n, z_n) + P_3(x_n, y_n, z_n) \end{aligned}$$

avec, pour les termes non linéaires, les correspondances suivantes :

(39)
$$\begin{aligned} P_m(x_n, y_n, z_n) &= \bar{R}_m(x_n, y_n, z_n) + j\,\bar{S}_m(x_n, y_n, z_n) \\ Q_m(x_n, y_n, z_n) &= \bar{R}_m(x_n, y_n, z_n) - j\,\bar{S}_m(x_n, y_n, z_n) \end{aligned}$$

où $\bar{R}_m(x_n, y_n, z_n)$, $\bar{S}_m(x_n, y_n, z_n)$ sont les transformées de $R_m(r_n, s_n, z_n)$, $S_m(r_n, s_n, z_n)$ par (37)

Pour être dans le cas particulier mentionné au chapitre 2, nous transformons (38) par

$$\xi = z_\gamma + v(x, y) = z_\gamma + \psi_{11} x + \psi_{12} y + \psi_{21} x^2 + \psi_{22} xy + \psi_{23} y^2$$

La récurrence devient alors :

(40)
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n e^{j\varphi} + \bar{P}_2(x_n, y_n, z_n) + \bar{P}_3(x_n, y_n, z_n) \\ y_{n+1} &= y_n e^{-j\varphi} + \bar{Q}_2(x_n, y_n, z_n) + \bar{Q}_3(x_n, y_n, z_n) \\ \xi_{n+1} &= \rho\,\xi_n + \bar{P}_{2\xi}(x_n, y_n, z_n) + \bar{P}_3(x_n, y_n, z_n) \end{aligned}$$

L'étude de la stabilité du cas critique peut alors être effectuée en examinant le signe de

$$G_1 = \bar{b}_{33} e^{j\varphi} + \bar{a}_{32} e^{-j\varphi} + \bar{b}_{21} \bar{a}_{23} + \bar{b}_{22} \bar{a}_{22} + \bar{b}_{23} \bar{a}_{21} +$$

$$+ 3 \left(\varphi_{31} \bar{a}_{23} e^{2j\varphi} + \varphi_{34} \bar{b}_{21} e^{-2j\varphi} \right) + 2 \left(\varphi_{32} \bar{a}_{22} + \varphi_{33} \bar{b}_{22} \right) + \quad (41)$$

$$+ \left(\varphi_{33} \bar{a}_{21} e^{-2j\varphi} + \varphi_{32} \bar{b}_{23} e^{2j\varphi} \right).$$

[6, 16, 17, 27] et (chapitre 2, paragraphe 3-2)

Les coefficients $\bar{a}$ $\bar{b}$ et φ sont relatifs à (40). Au chapitre précédent, nous avons établi les formules permettant le calcul de ces coefficients à partir de ceux de (38) et (36). Les résultats sont les suivants :

$$\varphi_{11} = \frac{a}{u - \rho} = 0 \qquad , \qquad \varphi_{12} = \frac{bu}{1 - u\rho} = 0$$

$$\bar{a}_{21} = a_{21} = -\frac{P}{4} \left(r_2 - j r_1 \right)$$

$$\bar{a}_{22} = a_{22} = 2\, a_{21}$$

$$\bar{a}_{23} = a_{23} = a_{21}$$

$$\bar{a}_{24} = a_{24} = \frac{P}{T} \left(r_3 - j r_2 \right)$$

$$\bar{a}_{25} = a_{24}$$

$$\bar{b}_{21} = b_{21} = -\frac{P}{4} \left(r_2 + j r_1 \right)$$

$$\bar{b}_{22} = b_{22} = 2\, b_{21}$$

$$\bar{b}_{23} = b_{23} = b_{21}$$

$$\bar{b}_{24} = b_{24} = \frac{P}{T} \left(r_3 + j r_2 \right)$$

$$\bar{b}_{25} = b_{25} = b_{24}$$

$$a_{32} = \frac{3q}{8} \left(r_2 - j r_1 \right) \qquad b_{33} = \frac{3q}{8} \left(r_2 + j r_1 \right)$$

$$\bar{a}_{32} = a_{32} + \varphi_{21} a_{25} + \varphi_{22} a_{24}$$

$$\bar{b}_{33} = b_{33} + \varphi_{22} b_{25} + \varphi_{23} b_{24}$$

$$d_{21} = -2\rho r_2 \qquad \Psi_{21} = -2\rho r_2 / (e^{2j\varphi} - \rho)$$

$$d_{22} = 2 d_{21} \qquad \Psi_{22} = -4\rho r_2 / (1-\rho)$$

$$d_{23} = d_{21} \qquad \Psi_{23} = -2\rho r_2 / (e^{-2j\varphi} - \rho)$$

$$\varphi_{31} = \frac{u \bar{b}_{21}}{1-u^3} \; ; \quad \varphi_{32} = \frac{u^2 \bar{b}_{22} + \bar{a}_{21}}{u(1-u)} \; ; \quad \varphi_{33} = \frac{u^2 \bar{b}_{23} + \bar{a}_{22}}{u-1} \; ; \quad \varphi_{34} = \frac{u^2 \bar{a}_{23}}{u^3 - 1}$$

$$\bar{a}_{32} = \frac{3q}{8}(r_2 - j r_1) - \frac{2\rho^2 r_2}{T}(r_3 - j r_2)\left(\frac{2}{1-\rho} + \frac{1}{u^2 - \rho}\right)$$

$$\bar{b}_{33} = \frac{3q}{8}(r_2 + j r_1) - \frac{2\rho^2 r_2}{T}(r_3 + j r_2)\left(\frac{2}{1-\rho} + \frac{1}{u^{-2} - \rho}\right)$$

La valeur de G_1 devant être réelle, nous vérifions par pair les complexes conjugués.

a) $$\bar{b}_{33} e^{j\varphi} + \bar{a}_{32} e^{-j\varphi} = \frac{3q}{4}(r_2 \cos\varphi - r_1 \sin\varphi) -$$

$$- \frac{4\rho^2 r_2}{T} \cdot \frac{2(r_3 \cos\varphi - r_2 \sin\varphi)}{1-\rho}$$

$$- \frac{(r_3 \cos\varphi - r_2 \sin\varphi)(\cos 2\varphi + \rho) - (r_2 \cos\varphi + r_3 \sin\varphi)\sin 2\varphi}{(\cos 2\varphi + \rho)^2 + \sin^2 2\varphi}$$

b) $$\bar{b}_{21}\bar{a}_{23} + \bar{b}_{22}\bar{a}_{22} + \bar{b}_{23}\bar{a}_{21} = 4\,\bar{a}_{21}\bar{b}_{21} = \frac{\rho^2}{4}(r_2^2 + r_1^2)$$

c) $$3(\varphi_{31}\bar{a}_{23} e^{2j\varphi} + \varphi_{34} b_{21} e^{-2j\varphi}) = \frac{3}{16}\,\frac{\rho^2(r_2^2 + r_1^2)(\cos 3\varphi - 1)}{(\cos 3\varphi - 1)^2 + \sin^2 3\varphi}$$

d) $$2(\varphi_{32}\bar{a}_{22} + \varphi_{33}\bar{b}_{22}) = -\frac{\rho^2}{2}(r_1^2 + r_2^2) +$$

$$+ \frac{\rho^2}{2[(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi]}\Big[(1-\cos\varphi)\{\cos\varphi(r_2^2 - r_1^2) - 2 r_1 r_2 \sin\varphi\} +$$

$$+ \sin\varphi\{\sin\varphi(r_2^2 - r_1^2) + 2 r_1 r_2 \cos\varphi\}\Big]$$

e) $$\varphi_{33}\bar{a}_{21} u^{-2} + \varphi_{32}\bar{b}_{23} u^2 = -\frac{\rho^2}{16}(r_2^2 + r_1^2) +$$

$$+ \frac{\rho^2}{4}\,\frac{(r_2^2 + r_1^2)(\cos 3\varphi - \cos 2\varphi) - 2 r_1 r_2 (\sin 3\varphi - \sin 2\varphi)}{(\cos 3\varphi - \cos 2\varphi)^2 + (\sin 3\varphi - \sin 2\varphi)^2}$$

En additionnant tous les termes de (a) à (e), nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
G_1 = {} & \frac{3}{4} q (r_2 \cos\varphi - r_1 \sin\varphi) - \frac{5}{16} p^2 (r_1^2 + r_2^2) - \\
& - 4 \frac{p^2 r_2}{T} \left[\frac{2 (r_3 \cos\varphi - r_2 \sin\varphi)}{1 - \rho} + \right. \\
& \left. + \frac{(r_3 \cos\varphi - r_2 \sin\varphi)(\cos\varphi + \rho) - \sin 2\varphi (r_2 \cos\varphi + r_3 \sin\varphi)}{(\cos 2\varphi + \rho)^2 + \sin^2 2\varphi} \right] \\
& \frac{p^2}{16} \left[\frac{3 (r_1^2 + r_2^2) (\cos 3\varphi - 1)}{(\cos 3\varphi - 1)^2 + \sin^2 3\varphi} + \right. \\
& + \frac{4 [(r_2^2 - r_1^2)(\cos 3\varphi - \cos 2\varphi) - 2 r_1 r_2 (\sin 3\varphi - \sin 2\varphi)]}{(\cos 3\varphi - \cos 2\varphi)^2 + (\sin 3\varphi - \sin 2\varphi)^2} + \\
& \left. + \frac{8 (1 - \cos\varphi) [\cos\varphi (r_2^2 - r_1^2) - 2 r_1 r_2 \sin\varphi] + \sin\varphi [\sin\varphi (r_2^2 - r_1^2) + 2 r_1 r_2 \cos\varphi]}{(1 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} \right]
\end{aligned}
\tag{42}
$$

3-4-3 - Quelques conclusions

L'expression de G_1 de (42) nous permet de déterminer le signe de G_1 et par suite, la stabilité du cas critique, à partir des données du problème : φ , p, q, ρ et les paramètres r_0, r_1, r_2, r_3 qui sont des fonctions de T.

Dans le cas où la caractéristique non linéaire $f(\omega)$ est symétrique par rapport à l'origine, c'est-à-dire $f(\omega)$ est de la forme $f(\omega) = k\omega + q\omega^3 + \ldots$

L'expression de G_1 de (42) devient, p étant nul

$$G_1 = \frac{3}{4} q \ (r_2 \cos\varphi - r_1 \sin\varphi) . \tag{43}$$

expression similaire à celle (17) du problème de Lur'e. La stabilité du cas critique dépend donc du signe de q et de celui de l'expression $m_2 = r_2 \cos\varphi - r_1 \sin\varphi$. Les quatre cas possibles sont :

sign q	sign m_2		Conclusion
α) type dur $q > 0$	α_1)	$m_2 < 0$ $G_1 < 0$	stable
	α_2)	$m_2 > 0$ $G_1 > 0$	instable

β) type mou $q < 0$	β_1)	$m_2 < 0$, $G_1 > 0$	instable
	β_2)	$m_2 > 0$, $G_1 < 0$	stable

Analysons plus en détail le signe de m_2. Nous connaissons les valeurs de r_1, r_2 par rapport à T (Rappelons que T est le rapport entre la période d'échantillonnage et la constante de temps τ)

$$(44)\quad H(T) = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1 - e^{-T} - T}{1 - e^{-T}} = 1 - \frac{T}{1 - e^{-T}}$$

pour $T = 0$, $H(T) = 1 - \frac{0}{0}$ levons l'indétermination en développant e^{-T}

$$H(T) = 1 - \frac{T}{T - \frac{T^2}{2!} + \frac{T^3}{3!} \cdots}$$

nous avons alors $H(T)_{T \to 0} = 1 - 1 = 0$

pour $T = 1$, $H(T) = 1 - (1/1 - 0{,}367) = -0{,}58$

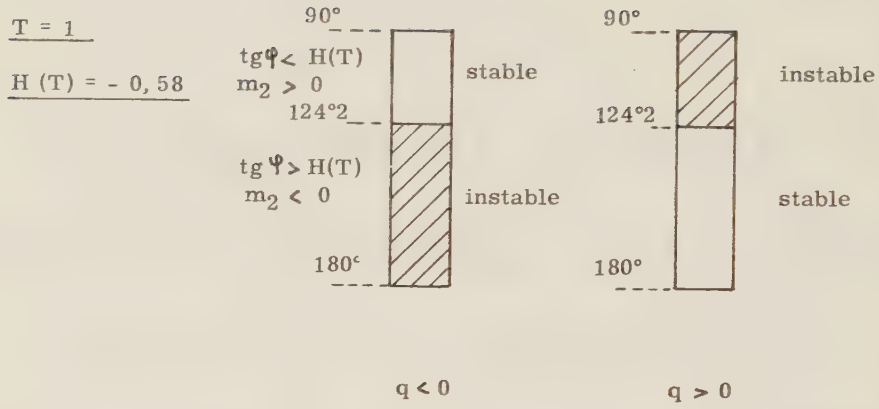
pour $T = \infty$, $H(T) = 1 - \infty \cong -\infty$

Nous avons représenté H (T) sur la figure 3-5. Les conclusions suivantes peuvent être tirées :

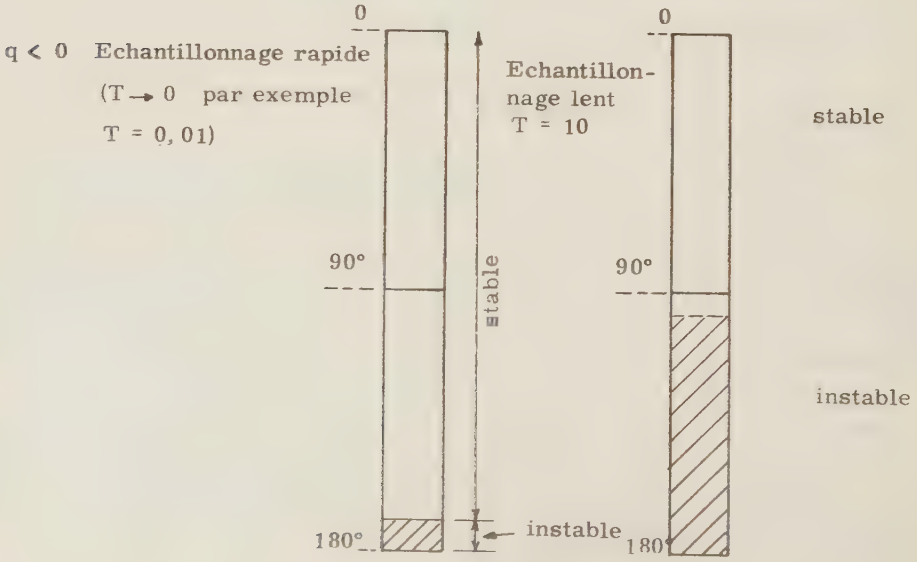
1° - Nous constatons que $H(T) < 0$, $\forall T$. Par conséquent, si nous avons $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\varphi > 0$ et $\operatorname{tg}\varphi$ toujours supérieur à r_2/r_1, de sorte que $m_2 < 0$ $\forall T$ Les conclusions sur la stabilité du cas critique se simplifient

m_2	q	Conclusion
$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	$q < 0$	$G > 0$ instable
$m_2 < 0$ $\forall T$	$q > 0$	$G < 0$ stable

2° Si T = 1, c'est-à-dire, la période d'échantillonnage égale à τ H (T) = - 0, 58, la valeur de φ_1 = arc tg (- 0, 58) = 124°2 constitue une séparation de deux domaines de comportement différent :



3° Prenons un signe défini de q, par exemple $q < 0$ et considérons toute la gamme des valeurs possibles de φ, $0 \leq \varphi \leq 180°$



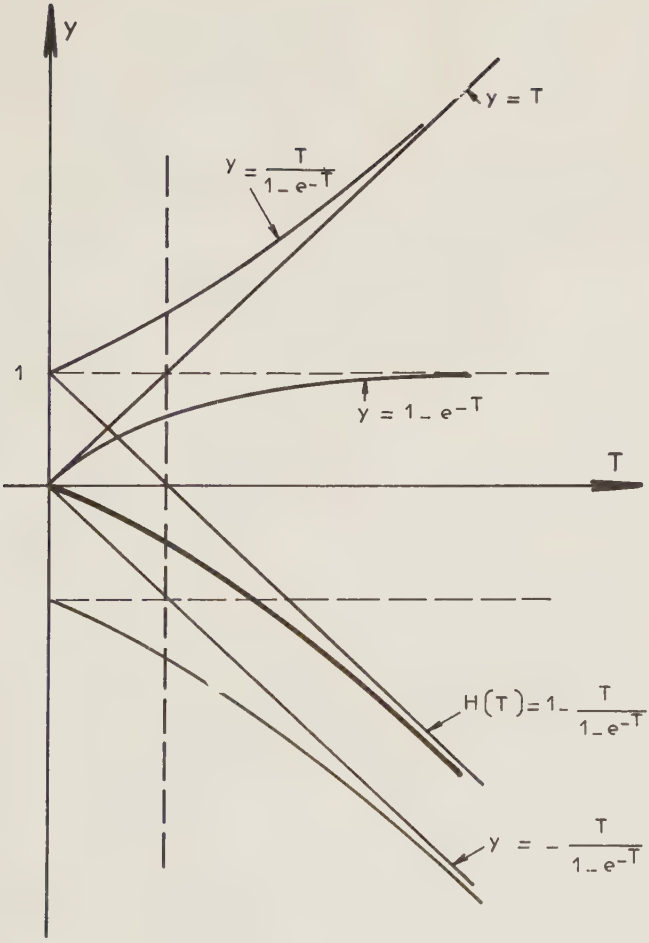


Figure 3-5 - Représentation de H (T) = $1 - \frac{T}{1 - e^{-T}}$

Nous constatons que le domaine de stabilité en S est d'autant plus grand que la période d'échantillonnage est petite.

Annexe 3 A : PROBLEME LUR'E - CALCUL DES DIVERS GROUPES DE COEFFICIENTS

3-A-1 - Coefficients des termes de degrés supérieurs ou égaux à 2 dans le système (3)

Désignons par $v^{(x)} = v^{(q+1)}$ et $v^{(y)} = v^{(q+2)}$ les composantes du vecteur v associées aux deux multiplicateurs complexes conjugués de module égal à un ; le système (2) se met sous la forme :

$$v_{n+1}^{(x)} = v_n^{(x)} \cos\varphi - v_n^{(y)} \sin\varphi + \sum_{m=2}^{\infty} S_m(\sigma_n)$$

$$v_{n+1}^{(y)} = v_n^{(x)} \sin\varphi + v_n^{(y)} \cos\varphi + \sum_{m=2}^{\infty} S_m(\sigma_n)$$

$$v_{n+1}^{(s)} = \rho_s v_n^{(s)} + \sum_{m=2}^{\infty} S_m(\sigma_n) \qquad ; \; s = 1, \ldots, q.$$

$$\sigma_n = h_x v^{(x)} + h_y v^{(y)} + \sum_{i=1}^{q} h_i v^{(i)}$$

$$v_n = \underline{k}^T \underline{u}_n$$

Dans ce système, toutes les variables v sont réelles. Transformons ce système par l'utilisation de deux variables complexes x et y telles que :

$$\left.\begin{aligned} x &= v^{(x)} + j v^{(y)} \\ y &= v^{(x)} - j v^{(y)} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} v^{(x)} &= 0{,}5\,(x+y) \\ v^{(y)} &= -0{,}5j\,(x-y) \end{aligned}\right.$$

les autres variables $v^{(s)}$, $s = 1, \ldots, q$ inchangées seront désignées par $z^{(s)}$. Le système transformé se mettra sous la forme :

$$x_{n+1} = x_n e^{j\varphi} + P_2(x_n, y_n, z_n^{(s)}) + P_3(x_n, y_n, z_n^{(s)}) + \cdots$$

$$y_{n+1} = y_n e^{-j\varphi} + Q_2(x_n, y_n, z_n^{(s)}) + Q_3(x_n, y_n, z_n^{(s)}) + \cdots$$

$$z_{n+1}^{(s)} = \rho_s z_n^{(s)} + R_2^{(s)}(x_n, y_n, z_n^{(s)}) + R_3(x_n, y_n, z_n^{(s)}) + \cdots$$

$$s = 1, \ldots, q.$$

où les polynômes P_2 P_3 Q_2 Q_3 R_2 R_3 sont de la forme :

$$P_2(x_n, y_n, z_n^{(s)}) = a_{21} x_n^2 + a_{22} x_n y_n + a_{23} y_n^2 + P_{2z}$$

$$Q_2(x_n, y_n, z_n^{(s)}) = b_{21} x_n^2 + b_{22} x_n y_n + b_{23} y_n^2 + Q_{2z}$$

$$P_3(x_n, y_n, z_n^{(s)}) = a_{31} x_n^3 + a_{32} x_n^2 y_n + a_{33} x_n y_n^2 + a_{34} y_n^3 + P_{3z}$$

$$Q_3(x_n, y_n, z_n^{(s)}) = b_{31} x_n^3 + b_{32} x_n^2 y_n + b_{33} x_n y_n^2 + b_{34} y_n^3 + Q_{3z}$$

$$R_2(x_n, y_n, z_n^{(s)}) = d_{21} x_n^2 + d_{22} x_n y_n + d_{23} y_n^2 + R_{2z}$$

$$R_3(x_n, y_n, z_n^{(s)}) = d_{31} x_n^3 + d_{32} x_n^2 y_n + d_{33} x_n y_n^2 + d_{34} y_n^3 + R_{3z}$$

où R_{2z}, R_{3z}, P_{2z}, P_{3z}, Q_{2z}, Q_{3z} ont des termes ayant en facteur au moins l'une des variables $z_n^{(s)}$. Les coefficients $a_{21} \ldots b_{21} \ldots a_{31} \ldots b_{31}$ peuvent être calculés d'après les formules données dans [27] à partir des coefficients des expressions S_m. Ecrivons $S_2(\sigma_n)$ et $S_3(\sigma_n)$ en mettant explicitement les coefficients des variables $v^{(x)}$ et $v^{(y)}$, les seuls qui nous intéressent

$$S_2(\sigma_n) = \mu \Psi_2 \sigma_n^2 = \mu \Psi_2 (h_x v^{(x)} + h_y v^{(y)})^2 + S_{2q}$$

$$S_3(\sigma_n) = \mu \Psi_3 \sigma_n^3 = \mu \Psi_3 (h_x v^{(x)} + h_y v^{(y)})^3 + S_{3q}$$

$$S_2(\sigma_n) = \mu \Psi_2 [h_x^2 v^{(x)2} + 2 h_x h_y v^{(x)} v^{(y)} + h_y^2 v^{(y)2}] + S_{2q}$$

$$S_3(\sigma_n) = \mu \Psi_3 [h_x^3 v^{(x)3} + 3 h_x^2 h_y v^{(x)2} v^{(y)} + 3 h_x h_y^2 v^{(x)} v^{(y)2} + h_y^3 v^{(y)3}] + S_{3q}$$

Désignons les coefficients qui nous intéressent par :

$$A = h_x^2 \qquad B = 2 h_x h_y \qquad C = h_y^2$$

$$D = h_x^3 \qquad E = 3 h_x^2 h_y \qquad F = 3 h_y h_x^2 \qquad G = h_y^3$$

Les coefficients a_2 et b_2 ont alors la forme :

$$a_{21} = \frac{1}{4}\left[(A+B-C) + j\,(A-B-C)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\mu\Psi_2\left[(h_x^2+2h_xh_y-h_y^2)+j(h_x^2-2h_xh_y-h_y^2)\right]$$

$$a_{22} = \frac{1}{2}\left[(A+C)+j(A+C)\right] = \frac{1}{2}\mu\Psi_2\,(h_x^2+h_y^2)\,(1+j)$$

$$a_{23} = \frac{1}{4}\left[(A-B-C) + j\,A+B-C)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\mu\Psi_2\left[(h_x^2-2h_xh_y-h_y^2)+j(h_x^2+2h_xh_y-h_y^2)\right]$$

$$b_{21} = a_{23}^*$$

$$b_{22} = a_{22}^*$$

$$b_{23} = a_{21}^*$$

Remarquons que nous avons également :

$$a_{21} = -\,j\,a_{23}^* \qquad ;\; a_{23} - j\,a_{21}^*$$

Les coefficients a_3 et b_3 ont la forme :

$$a_{31} = \frac{1}{8}\left[(D+E-F-G) + j\,(D-E-F+G)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\mu\Psi_3\left[(h_x^3+3h_x^2h_y-3h_xh_y^2-h_y^3)+j(h_x^3-3h_x^2h_y-3h_xh_y^2+h_y^3)\right.$$

$$a_{32} = \frac{1}{8}\left[(3D+E+F+3G) + j\,(3D-E+F-3G)\right]$$

$$= \frac{3}{8}\mu\Psi_3\left[(h_x^3+h_x^2h_y+h_xh_y^2+h_y^3)+j(h_x^3-h_x^2h_y+h_xh_y^2-h_y^3)\right]$$

$$a_{33} = \frac{1}{8}\left[(3D-E+F-3G) + j\,(3D+E+F+3G)\right]$$

$$= \frac{3}{8}\mu\Psi_3\left[(h_x^3-h_x^2h_y+h_xh_y^2-h_y^3)+j(h_x^3+h_x^2h_y+h_xh_y^2+h_y^3)\right]$$

$$a_{34} = \frac{1}{8}\left[(D-E-F+G) + j\,(D+E-F-G)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\mu\Psi_3\left[(h_x^3-3h_x^2h_y-h_xh_y^2+h_y^3)+j(h_x^3+3h_x^2h_y-3h_xh_y^2-h_y^3)\right]$$

$$b_{31} = a_{34}^* \;,\; b_{32} = a_{33}^* \;,\; b_{33} = a_{32}^* \;,\; b_{34} = a_{31}^*$$

Remarquons que nous avons également :

$$a_{31} = -j a_{34}^{*} \quad , \quad a_{34} = -j a_{31}^{*} \quad , \quad a_{32} = -j a_{33}^{*} \quad , \quad a_{33} = -j a_{32}^{*}$$

Les coefficients de d_2 et d_3 peuvent être identifiés en développant S_2 et S_3 par rapport à x et y Nous avons :

$$\sigma_n = h_x v^{(x)} + h_y v^{(y)} + \sum_{i=1}^{q} h_i v^{(i)}$$

$$= h_x [0,5 (x+y)] + h_y [-0,5 j (x-y)] + \sum_{i=1}^{q} h_i v^{(i)}$$

D'où :

$$\sigma_n = ax + by + \sum_{i=1}^{q} h_i z^{(i)}$$

avec :

$$a = 0,5 (h_x - j h_y)$$

$$b = 0,5 (h_x + j h_y) \qquad s = 1, \ldots, q.$$

Nous avons alors :

$$S_2 (x_n, y_n, z_n^{(s)}) = \mu \Psi_2 \sigma_n^2 = \mu \Psi_2 (a x_n + b y_n + \sum_{i=1}^{q} h_i z_n^{(i)})^2$$

$$= \mu \Psi_2 (a^2 x_n^2 + 2ab x_n y_n + b^2 y_n^2) + S_{2z} = R_2$$

$$S_3 (x_n, y_n, z_n^{(s)}) = \mu \Psi_3 \sigma_n^3 = \mu \Psi_3 (a x_n + b y_n + \sum_{i=1}^{q} h_i z_n^{(1)})^3$$

$$= \mu \Psi_3 (a^3 x_n^3 + 3a^2 b x_n^2 y_n + 3ab^2 x_n y_n^2 + b^3 y_n^3) + S_{3z} = R_3$$

$$d_{21} = a^2 \mu \Psi_2, \qquad d_{22} = 2ab \mu \Psi_2 \quad , \quad d_{23} = b^2 \mu \Psi_2$$

$$d_{31} = a^3 \mu \Psi_3 \quad , \quad d_{32} = 3a^2 b \mu \Psi_3 \quad , d_{33} = 3ab^2 \mu \Psi_3 \quad , \quad d_{34} = b^3 \mu \Psi_3$$

3-A-2 - Calcul des coefficients a_{24} a_{25} b_{24} b_{25}

Dans le calcul de G_1, nous avons besoin des coefficients $\bar{a}_{32}$ et $\bar{b}_{33}$ qui dépendent eux-mêmes des coefficients a_{24}, a_{25}, b_{24}, b_{25}. Ces derniers sont les coefficients des termes en $xz^{(s)}$ et $yz^{(s)}$ dans P_{2z} et Q_{2z}. Nous allons donc établir ces derniers.

Développons $v_{n+1}^{(x)}$ et $v_{n+1}^{(y)}$ en prenant uniquement les termes du second degré :

$$v_{n+1}^{(x)} = \dots\dots \mu\psi_2 \left(h_x v_n^{(x)} + h_y v_n^{(y)} + \sum_{s=1}^{q} h_s z_n^{(s)} \right)^2 + \dots\dots$$

$$v_{n+1}^{(y)} = \dots\dots \mu\psi_2 \left(h_x v_n^{(x)} + h_y v_n^{(y)} + \sum_{s=1}^{q} h_s z_n^{(s)} \right)^2 + \dots\dots$$

Remplaçant les v en fonction de x et y

$$0{,}5\, j\, (x_{n+1} + y_{n+1}) = \dots\dots \mu\psi_2 \left[h_x 0{,}5 (x_n + y_n) - 0{,}5\, h_y\, j\, (x_n - y_n) + \sum_{1}^{q} h_s z_n^{(s)} \right]^2$$

$$-0{,}5\, j\, (x_{n+1} - y_{n+1}) = \dots\dots \mu\psi_2 \left[0{,}5 h_x (x_n + y_n) - 0{,}5 h_y\, j\, (x_n - y_n) + \sum_{1}^{q} h_s z_n^{(s)} \right]^2$$

Introduisant les coefficients a et b définis plus haut :

$$\alpha) \quad 0{,}5 (x_{n+1} + y_{n+1}) = \dots\dots \mu\psi_2 \left[(a x_n + b y_n)^2 + \left(\sum_{1}^{q} h_s z_n^{(s)} \right)^2 + 2 (a x_n + b y_n) \sum_{1}^{q} h_s z_n^{(s)} \right] + \dots\dots$$

$$\beta) \quad 0{,}5 (x_{n+1} - y_{n+1}) = \dots\dots - j\, \mu\psi_2 \left[(a x_n + b y_n)^2 + \left(\sum_{1}^{q} h_s z_n^{(s)} \right)^2 + 2 (a x_n + b y_n) \sum_{1}^{q} h_s z_n^{(s)} \right] + \dots\dots$$

La différence $(\alpha) - (\beta)$ donne :

$$x_{n+1} = \dots\dots \mu\psi_2 \left[\left(2a \sum_{1}^{q} h_s \right) (1+j) \right] x_n z_n^{(s)} + \mu\psi_2 \left[\left(2b \sum_{1}^{q} h_s \right) (1+j) \right] y_n z_n^{(s)} + \dots\dots$$

La somme $(\alpha) + (\beta)$ donne :

$$y_{n+1} = \dots\dots \mu\psi_2 \left[2a (1-j) \sum_{1}^{q} h_s \right] x_n z_n^{(s)} + \mu\psi_2 \left[2b (1-j) \sum_{1}^{q} h_s \right] y_n z_n^{(s)}$$

D'où les coefficients cherchés :

$$a_{24} = \mu\psi_2\, 2a (1+j) \sum_{1}^{q} h_s \qquad a_{25} = \mu\psi_2\, 2b (1+j) \sum_{1}^{q} h_s$$

$$b_{24} = \mu\psi_2\, 2a (1-j) \sum_{1}^{q} h_s \qquad b_{25} = \mu\psi_2\, 2b (1-j) \sum_{1}^{q} h_s$$

Nous remarquons que nous ayons :

$$a^*_{24} = b_{25} \qquad a^{**}_{225} = b_{224}$$

$$(a^* = b \quad , \quad b^* = a)$$

En prenant le terme $\mu\, \Psi_3\, \sigma^3$ nous avons :

$$0{,}5(x_{n+1}+y_{n+1}) = \cdots + \mu\,\Psi_3\Big\{x_n^3\,\frac{1}{8}\big[h_x(h_x^2-3h_y^2)-jh_y(3h_x^2-h_y^2)\big]$$
$$+ x_n y_n^2\,\frac{3}{8}\big[h_x(h_x^2+h_y^2)-jh_y(h_x^2+h_y^2)\big]$$
$$(\gamma)\qquad + x_n y_n^2\,\frac{3}{8}\big[h_x(h_x^2+h_y^2)+jh_y(h_x^2+h_y^2)\big]$$
$$+ \quad y_n^3\,\frac{1}{8}\big[h_x(h_x^2+3h_y^2)+jh_y(3h_x^2-h_y^2)\big]\Big\}+$$

$$0{,}5(y_{n+1}-x_{n+1}) = + \cdots + \mu\,\Psi_3\Big\{x_n^3\,\frac{11}{88}\big[-jh_x(h_x^2-3h_y^2)-h_y(3h_x^2-h_y^2)\big]$$
$$+ x_n^2 y_n\,\frac{3}{8}\big[-jh_x(h_x^2+h_y^2)-h_y(h_x^2+h_y^2)\big]$$
$$(\delta)\qquad + x_n y_n^2\,\frac{3}{8}\big[-jh_x(h_x^2+h_y^2)+h_y(h_x^2+h_y^2)\big]$$
$$+ \quad y_n^3\,\frac{1}{8}\big[-jh_x(h_x^2-3h_y^2)+h_y(3h_x^2-h_y^2)\big]\Big\}$$

La différence $(\gamma)-(\delta)$ donne :

$$x_{n+1} = \cdots + \mu\,\Psi_3\Big\{x_n^3\,\frac{1}{8}\big[h_x(h_x^2-3h_y^2)+h_y(3h_x^2-h_y^2)$$
$$-jh_y(3h_x^2-h_y^2)+jh_x(h_x^2-h_y^2)\big]$$
$$+\frac{3}{8}x_n^2 y_n\big[h_x(h_x^2+h_y^2)+h_y(h_x^2+h_y^2)-jh_y(h_x^2+h_y^2)$$
$$+jh_x(h_x^2+h_y^2)$$
$$+\frac{3}{8}x_n y_n^2\big[h_x(h_x^2+h_y^2)-h_y(h_x^2+h_y^2)+jh_y(h_x^2+h_y^2+jh_x(h_x^2+h_y^2)\big]$$
$$+\frac{y_n^3}{8}\big[h_x(h_x^2-3h_y^2)-h_y(3h_x^2-h_y^2)+jh_y(3h_x^2-h_y^2)+jh_x(h_x^2-3h_y^2)\big]\Big\}$$
$$+\cdots$$

La somme $(\gamma) + (\delta)$ donne :

$$y_{n+1} = \cdots + \mu\Psi_3 \left\{ \frac{x_n^3}{8} \left[h_x (h_x^2 - 3h_y^2) - h_y (3h_x^2 - h_y^2) - j h_y (3h_x^2 - h_y^2) - j h_x (h_x^2 - 3h_y^2) \right] \right.$$

$$+ \frac{3}{8} x_n^2 y_n \left[h_x (h_x^2 + h_y^2) - h_y (h_x^2 + h_y^2) - j h_y (h_x^2 + h_y^2) - j h_x (h_x^2 + h_y^2) \right]$$

$$+ \frac{3}{8} x_n y_n^2 \left[h_x (h_x^2 + h_y^2) + h_y (h_x^2 + h_y^2) + j h_y (h_x^2 + h_y^2) - j h_x (h_x^2 + h_y^2) \right]$$

$$+ \frac{1}{8} y_n^3 \left[h_x (h_x^2 - 3h_y^2) + h_y (3h_x^2 - h_y^2) + j h_y (3h_x^2 - h_y^2) - j h_x (h_x^2 - 3h_y^2) \right]$$

$$+ \cdots\cdots$$

De ces deux dernières équations, on tire a_{32} = coefficient du terme en $x_n^2 y_n$ dans x_{n+1} et b_{33} = coefficient du terme en $x_n y_n^2$ dans y_{n+1}

$$a_{32} = (h_x^2 + h_y^2) \left[(h_x + h_y) + j (h_x - h_y) \right] \mu \Psi_3 \frac{3}{8}$$

$$b_{33} = \mu \Psi_3 \frac{3}{8} (h_x^2 + h_y^2) \left[(h_x + h_y) - j (h_x - h_y) \right]$$

3-A-3 - Simplification des expressions de a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{32}

A partir de : $a = 0{,}5 \ (h_x - j h_y)$

$b = 0{,}5 \ (h_x + j h_y)$

Nous pouvons tirer :

$h_x = a + b$ $\qquad$ $h_x^2 = (a+b)^2$

$h_y = j(a-b)$ $\qquad$ $h_y^2 = -(a-b)^2$

$h_x^2 + h_y^2 = 4ab$ $\qquad$ $h_x^2 - h_y^2 = 2(a^2 + b^2)$

$h_x h_y = j(a^2 - b^2)$

de sorte que nous ayons :

$$a_{21} = \frac{1}{4}\mu\Psi_2\left[2(a^2+b^2)+2j(a^2-b^2)+2j(a^2+b^2)+2(a^2-b^2)\right]$$

$$= \underline{\mu\Psi_2 a^2(1+j)}$$

$$a_{22} = \frac{1}{2}\mu\Psi_2 4ab(1+j) = \underline{2\mu\Psi_2 ab(1+j)}$$

$$a_{23} = \frac{1}{4}\mu\Psi_2\left[2(a^2+b^2)-2j(a^2-b^2)+2j(a^2+b^2)-2(a^2-b^2)\right]$$

$$= \underline{\mu\Psi_2 b^2(1+j)}$$

$$a_{32} = \frac{3}{8}\mu\Psi_3\left[(h_x^2+h_y^2)\left[(h_x+h_y)+j(h_x-h_y)\right]\right]$$

$$= \frac{3}{8}\mu\Psi_3\left[4ab(a+b+ja-jb+ja+jb+a-b)\right]$$

$$= \underline{3a^2b\,\mu\Psi_3(1+j)}$$

$$b_{33} = \underline{3ab^2\mu\Psi_3(1-j)} \qquad (b_{33} = a_{32}^*)$$

3-A-4 - Calcul des coefficients transformés

Le calcul de l'expression de G_1 a besoin des coefficients transformés $\bar{a}_{32}$, $\bar{b}_{33}$, $\bar{a}_{21}$, $\bar{a}_{22}$, $\bar{a}_{23}$, $\bar{b}_{21}$, $\bar{b}_{22}$, $\bar{b}_{23}$. Ces derniers sont calculés à partir des coefficients a_{21} à a_{26}, b_{21} à b_{26}, a_{32} , b_{33} d'après les formules données au chapitre 2. Remarquons que dans la fonction utilisée pour la transformation en $\eta^{(s)}$ en $\xi^{(s)}$.

$$v_s(x,y) = v_s^{(1)}(x,y) + v_s^{(2)}(x,y) + \cdots$$

la partie $v_5^{(1)}(x,y)$ est nulle, de sorte que les coefficients Ψ_{11} , Ψ_{12} du chapitre 2 sont nuls. Par contre les coefficients Ψ_{21} , Ψ_{22} , Ψ_{23} sont ici M_5, $2P_5$ et N_5. Les résultats des calculs sont :

$$\bar{a}_{21} = a_{21}$$

$$\vdots$$

$$\bar{a}_{26} = a_{26}$$

$$\bar{b}_{21} = b_{21}$$

$$\vdots$$

$$\bar{b}_{26} = b_{26}$$

$$\bar{a}_{32} = a_{32} + a_{25}\sum_1^9 M_5 + a_{24}\sum_1^9 2P_5$$

$$\bar{b}_{33} = b_{33} + b_{25}\sum_1^9 2P_5 + b_{24}\sum_1^9 N_5$$

Annexe 3 B - PROBLEME DE LUR'E : CALCUL DE G_1

Le calcul de G_1 se fait en calculant séparément les différentes paires d'expressions complexes conjuguées. Les propriétés suivantes ont beaucoup facilité les calculs. Soient $\ell = \ell_1 + j\ell_2$, $m = m_1 + jm_2$, $n = \ldots$, nous avons :

$$(\ell m)^* = \ell^* m^* \; ; \; (\ell m n p)^* = \ell^* m^* n^* p^*$$

$$\ell + \ell^* = 2\ell_1 \; ; \; \ell - \ell^* = 2j\ell_2 \; ; \; \ell . \ell^* = \ell_1^2 + \ell_2^2$$

$$\ell . m = \ell_1 m_1 - \ell_2 m_2 + j(\ell_1 m_2 + \ell_2 m_1)$$

1°

$$u\bar{b}_{33} + \frac{\bar{a}_{32}}{u} = \frac{a_{32}}{u} + ub_{33} + \frac{1}{u}(a_{25}\Sigma M_s + a_{24}\Sigma 2P_s) + u(b_{25}\Sigma 2P_s + b_{24}\Sigma N_s) \qquad (\Sigma = \sum_{s=1}^{q})$$

$$= 3ab\mu\psi_3\left[\frac{a(1+j)}{u} + ub(1-j)\right] + 2\mu_2^2\psi_2^2\sum_{s=1}^{q} h_s\left[(1+j)\left(\frac{a^2 b}{u^2 - \rho_s} + \frac{2ab}{1-\rho_s}\right) + (1-j)\left(\frac{2ab^2}{1-\rho_s} + \frac{ab^2}{u^{-2} - \rho_s}\right)\right]$$

$$\frac{3}{8}\mu\psi_3(h_x^2 + h_y^2)\left[\cos\varphi\,(h_x + h_y) + \sin\varphi\,(h_x - h_y)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\mu\psi_2(h_x^2 + h_y^2)\sum_{s=1}^{q} h_s\left[\frac{2(h_x + h_y)}{1-\rho_s} + \frac{h_x(\cos 2\varphi - \rho_s) + h_y \sin 2\varphi}{(\cos 2\varphi - \rho_s)^2 + \sin^2 2\varphi}\right]$$

2°

$$\bar{b}_{21}\bar{a}_{23} + \bar{b}_{23}\bar{a}_{21} = \bar{a}_{23}\bar{a}_{23}^* + \bar{a}_{21}\bar{a}_{21}^*$$

$$= \mu^2\psi_2^2\left[a^2(1+j)\right]\left[b^2(1-j)\right] + \mu^2\psi_2^2\left[b^2(1+j)\right]\left[a^2(1-j)\right]$$

$$= 4\mu^2\psi_2^2 a^2 b^2 = \frac{1}{4}\mu^2\psi_2^2\left(h_x^2 + h_y^2\right)^2$$

3° $\bar{a}_{22}\bar{b}_{22} = \bar{a}_{22}\bar{a}_{22}^{*} = 2\mu\Psi_2 ab(1+j)\cdot 2\mu\Psi_2 ba(1-j)$

$$= 8\mu^2\Psi_2^2 a^2b^2 = \frac{1}{2}\mu^2\Psi_2^2(h_x^2+h_y^2)^2$$

4° $3(\varphi_{31}u^2\bar{a}_{23} + \varphi_{34}\frac{\bar{b}_{21}}{u^2}) = 3\left(\frac{\bar{a}_{23}\bar{b}_{21}u^3}{1-u^3} + \frac{\bar{a}_{23}b_{21}u^{-3}}{1-u^{-3}}\right)$

$$= 6\mu^2\Psi_2^2 a^2b^2\left(\frac{u^3}{1-u^3} + \frac{u^{-3}}{1-u^{-3}}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\mu^2\Psi_2^2(h_x^2+h_y^2)\frac{\cos 3\varphi - 1}{(\cos 3\varphi - 1)^2 + \sin^2 3\varphi}$$

5° $2(\varphi_{32}\bar{a}_{22} + \varphi_{33}\bar{b}_{22}) = 2\left[\frac{\bar{a}_{22}\bar{b}_{22}}{u^{-1}-1} + \frac{\bar{a}_{21}\bar{a}_{22}u^{-1}}{1-u} + \frac{\bar{a}_{22}\bar{b}_{22}}{u-1} + \frac{\bar{b}_{22}b_{23}u}{1-u^{-1}}\right]$

$$= 2\left[8\mu^2\Psi_2^2 a^2b^2\left(\frac{1}{u^{-1}-1} + \frac{1}{u-1}\right) + 2\mu^2\Psi_2^2 ab\left(\frac{a^2(1+j)^2u^{-1}}{1-u} + \frac{b^2(1-j)^2u}{1-u^{-1}}\right)\right]$$

$$= 4\mu^2\Psi_2^2 a^2b^2\left[\frac{\cos\varphi - 1}{(\cos\varphi-1)^2 - \sin^2\varphi}\right] + \mu^2\Psi_2^2 ab\,\frac{2h_xh_y(\cos 2\varphi - \cos\varphi)}{2\cos\varphi} +$$

$$+ \frac{(h_x^2 - h_y^2)(\sin 2\varphi - \sin\varphi)}{2\cos\varphi}$$

$$= \frac{4\mu^2\Psi_2^2 a^2b^2}{2\cos\varphi} + \frac{\mu^2\Psi_2^2 ab}{2\cos\varphi}\left[2h_xh_y(\cos 2\varphi - \cos\varphi) + (h_x^2 - h_y^2)(\sin 2\varphi - \sin\varphi)\right]$$

$$= \frac{\mu^2\Psi_2^2}{2\cos\varphi}\left[\frac{(h_x^2+h_y^2)^2}{4} + \frac{(h_x^2+h_y^2)}{8}(2h_xh_y(\cos 2\varphi - \cos\varphi) + (h_x^2 - h_y^2)(\sin 2\varphi - \sin\varphi)\right]$$

6°

$$\varphi_{33}a_{21}u^{-2} + \varphi_{32}b_{23}u^2 = \frac{\bar{a}_{21}\bar{a}_{22}u^{-2}}{u-1} + \frac{\bar{a}_{21}\bar{b}_{23}u^{-1}}{1-u^{-1}} + \frac{\bar{b}_{22}\bar{b}_{23}u^2}{u^{-1}-1} + \frac{\bar{a}_{21}\bar{b}_{23}u}{1-u}$$

$$= \bar{a}_{21}\bar{b}_{23}\left(\frac{u^{-1}}{1-u^{-1}} + \frac{u}{1-u}\right) + \frac{\bar{a}_{21}\bar{a}_{22}}{u^3-u^2} + \frac{\bar{b}_{22}\bar{b}_{23}}{u^{-3}-u^{-2}}$$

$$= \frac{1}{16}\mu^2\Psi_2^2(h_x^2+h_y^2)$$

$$+\frac{1}{4}\mu^2\Psi_2^2(h_x^2+h_y^2)\,\frac{2h_xh_y(\cos 3\varphi - \cos 2\varphi) + (h_x^2+h_y^2)(\sin 3\varphi - \sin 2\varphi)}{(\cos 3\varphi - \cos 2\varphi)^2 + (\sin 3\varphi - \sin 2\varphi)^2}$$

$$G_1 = \frac{3}{8}\mu\psi_3(h_x^2+h_y^2)\left[\cos\varphi\,(h_x+h_y)+\sin\varphi\,(h_x-h_y)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\mu^2\psi_2^2(h_x^2+h_y^2)\sum_{s=1}^{9}h_s\left(\frac{2(h_x+h_y)}{1-\rho_s}+\frac{h_x(\cos 2\varphi-\rho_s)+h_y\sin 2\varphi}{(\cos 2\varphi-\rho_s)^2+\sin^2 2\varphi}\right)$$

$$+\frac{3}{4}\mu^2\psi_2^2(h_x^2+h_y^2)^2+\frac{3}{4}\mu^2\psi_2^2(h_x^2+h_y^2)\frac{\cos 3\varphi-1}{(\cos 3\varphi-1)^2+\sin^2 3\varphi}$$

$$+\frac{\mu^2\psi_2^2(h_x^2+h_y^2)^2}{8\cos\varphi}\left[1+\frac{1}{2(h_x^2+h_y^2)}(2h_xh_y)(\cos\varphi-\cos\varphi)+(h_x^2-h_y^2)(\sin 2\varphi-\sin\varphi)\right]$$

$$+\frac{1}{4}\mu^2\psi_2^2(h_x^2+h_y^2)\,\frac{2h_xh_y(\cos 3\varphi-\cos 2\varphi)+(h_x^2+h_y^2)(\sin 3\varphi-\sin 2\varphi)}{(\cos 3\varphi-\cos 2\varphi)+(\sin 3\varphi-\sin 2\varphi)^2}$$

Annexe 3 C - MULTIPLICATEURS DES RECURRENCES DU TROISIEME ORDRE

A plusieurs endroits de notre étude, nous avons affaire aux récurrences du troisième ordre. Nous connaissons le rôle important joué par les multiplicateurs dans l'analyse de la stabilité. Nous allons donc établir la relation entre la valeur ou le type de ces multiplicateurs et les paramètres de l'équation caractéristique.

3-C-1 - Expression de la récurrence et détermination des multiplicateurs

Avant de procéder par analogie, rappelons brièvement que dans le cas d'une récurrence du 2ème ordre, mise sous la forme

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a x_n + b y_n + P(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= c x_n + d y_n + Q(x_n, y_n) \end{aligned} \tag{45}$$

où $P(x_n, y_n)$ et $Q(x_n, y_n)$ contiennent des termes de degré non inférieur à 2, le déterminant des multiplicateurs S s'écrit :

$$M_2 = \begin{bmatrix} a-S & b \\ c & d-S \end{bmatrix}$$

En écrivant

$$\sigma = S_1 + S_2 = a + d$$

$$\Delta = S_1 \cdot S_2 = ad + bc.$$

les lieux ou séparatrices (figure 3-6)

$$1 - \sigma + \Delta = 0 \qquad 1 + \sigma + \Delta = 0$$

$$\Delta = 1 \quad \text{avec} \quad |\sigma| \leq 2.$$

partagent le plan $\sigma - \Delta$ en un certain nombre de zones correspondant aux différents types de points singuliers [26]

Dans le cas des récurrences du 3ème ordre l'une des formes générales est :

$$x_{n+1} = a x_n + b y_n + c z_n + k(x_n, y_n, z_n)$$

(46) $$y_{n+1} = e x_n + f y_n + d z_n + m(x_n, y_n, z_n)$$

$$z_{n+1} = g x_n + h y_n + p z_n + n(x_n, y_n, z_n)$$

où k, m, n contiennent les termes de degré non inférieur à 2.

A cette forme correspond l'équation suivante des multiplicateurs :

où

$$\begin{vmatrix} a-S & b & c \\ e & f-S & d \\ g & h & p-S \end{vmatrix} = 0$$

(47) $$S^3 + (a+f+p)\,S^2 - (af + ap + fp)\,S + afp - bdg + ceh = 0$$

où

(48) $$F(S) = S^3 - \sigma S^2 + \Delta S - \pi = 0$$

avec $$\sigma = -(a+f+p) = S_1 + S_2 + S_3$$

$$\Delta = -(af + ap + fp) = S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_1 S_3$$

$$\pi = -(afp - bdg + ceh) = S_1 S_2 S_3$$

Pour pouvoir distinguer les différents types de points singuliers en fonction des valeurs des multiplicateurs, il est nécessaire de savoir :

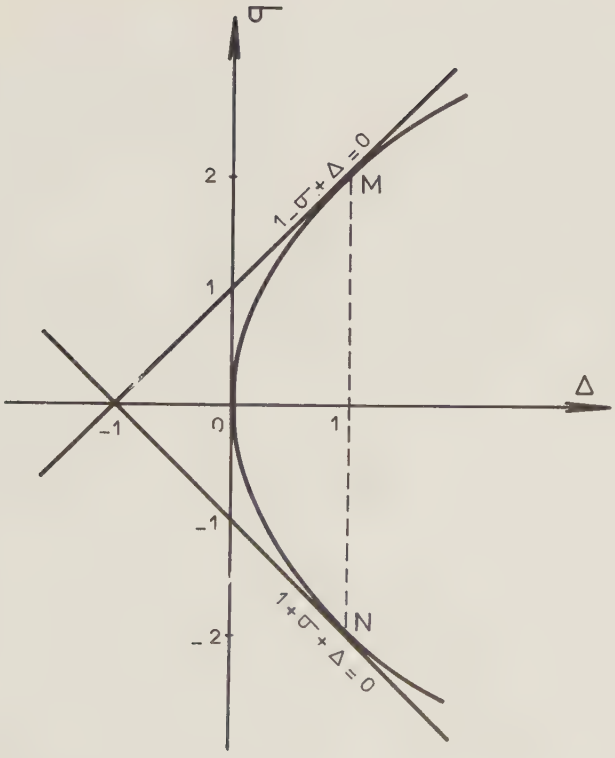


Figure 3-6 - Domaine des multiplicateurs de module inférieur à 1

a) dans quelles conditions les racines de (48) sont complexes et ·

b) dans quelles conditions le module des multiplicateurs est inférieur ou égal à 1. $|S| \leq 1$

3-C-2 - Surface des cas critiques

Les conditions d'avoir $|S| \leq 1$ sont [41, 43, 63,]

a) $|-\pi| \leq 1$ ou $|\pi| - 1 \leq 0$

b) $\pi^2 - 1 < \sigma\pi - \Delta$ ou $\pi^2 - 1 - \sigma\pi + \Delta \leq 0$

c) $F(1) \geq 0$ ou $1 - \sigma + \Delta - \pi \geq 0$

d) $F(-1) \leq 0$ ou $-1 - \sigma - \Delta - \pi < 0$

La condition (a) signifie que la zone de stabilité se trouve comprise entre les deux plans horizontaux $\pi = +1$ et $\pi = -1$ (figure 3-7) ou P_1 et P_2. La condition (c) donne le plan triangulaire T_2 (CAB), tandis que la condition (d) donne le plan triangulaire T_1 (ACD). La condition (b) montre que, pour un couple (σ, Δ) donné, il existe deux déterminations en π. En effet, la surface S a une forme hélicoïdale. On constate d'autre part que, pour π constant, la condition (b) est réduite à une droite (de forme $\Delta = C_1\sigma + C_2$; C_1, C_2 constantes). On peut donc imaginer la surface S_1 comme résultat du mouvement d'un segment de droite horizontale EF qui se déplace de P_1 à P_2 avec ses extrémités E et F s'appuyant respectivement sur les arêtes AD et BC. Remarquons aussi que :

1°) pour $\pi = +1$, la condition (c) se réduit à la droite $-\sigma + \Delta = 0$, à laquelle vient se confondre la condition (b)

2°) pour $\pi = -1$, la condition (d) se réduit à la droite $-\sigma - \Delta = 0$ à laquelle vient aussi se confondre la condition (b).

3°) pour $\pi = 0$, il est évident qu'on retrouve les conditions (b), (c), (d) identiques à celles de la récurrence du 2ème ordre (figure 3-6).

L'ensemble des points examinés précédemment permet de voir que "Le volume de stabilité V se présente sous la forme d'un trièdre, ayant ses trois faces T_1, T_2 (triangles) et S (parabole hélicoïdal) "

La surface critique, c'est-à-dire le lieu des points où l'on a $|S| = 1$ est constituée par l'ensemble des trois faces T_1, T_2 et S.

3-C-3 - Existence des multiplicateurs complexes

Reprenons l'équation (48). Etant donné que c'est une équation algébrique du 3ème degré, il y aura des racines complexes si

$$R = 4p^3 + 27q^2 > 0$$

Dans notre cas, nous avons

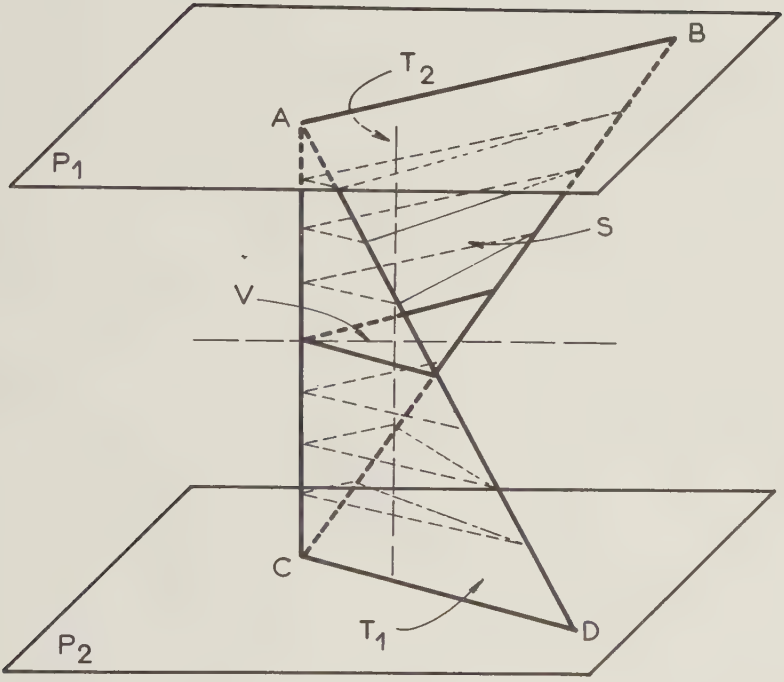
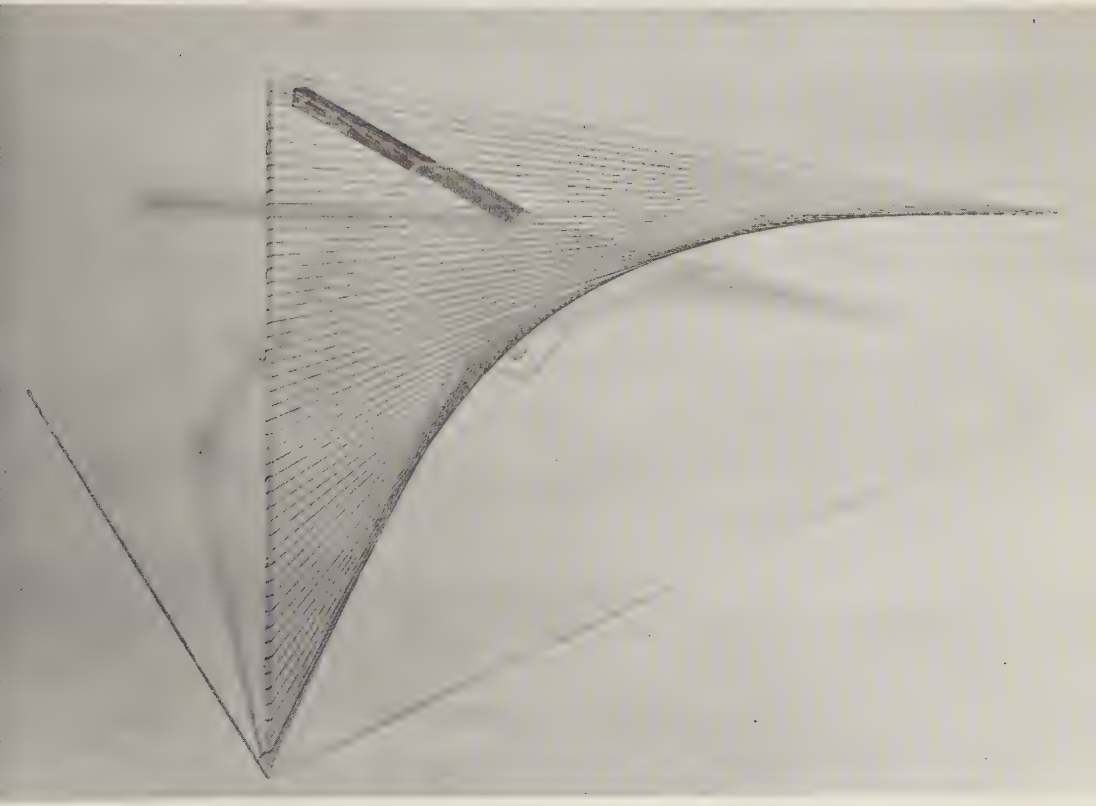


Figure 3-7 - Surface des cas critiques



$$p = \Delta - \frac{\sigma^2}{3}$$

$$q = 2\left(\frac{\sigma}{3}\right)^3 + \frac{\sigma\Delta}{3} - \pi$$

Il en résulte la condition de complexité

(e) $$\Delta^2(4\Delta - \sigma^2) - \pi(-27\pi + 18\sigma\Delta - 4\sigma^3) > 0$$

Cette relation, fortement non linéaire est représentée par une surface très complexe dans l'espace $\pi - \sigma - \Delta$. On peut toutefois en saisir une idée partielle mais essentielle en cherchant son comportement près du trièdre de stabilité.

Le problème est d'éviter à résoudre la relation non linéaire (e). Pour cela, on peut partir des deux constatations suivantes.

1°) on sait que, pour $\pi = 0$ (figure 3-6) il correspond à chaque valeur de σ une seule détermination de Δ

2°) la relation (e) étant continue, il est évident que, sur les plans $\pi = \pi_0$ avec π_0 peu différent de zéro, on doit trouver, pour σ donnée au moins une détermination de Δ.

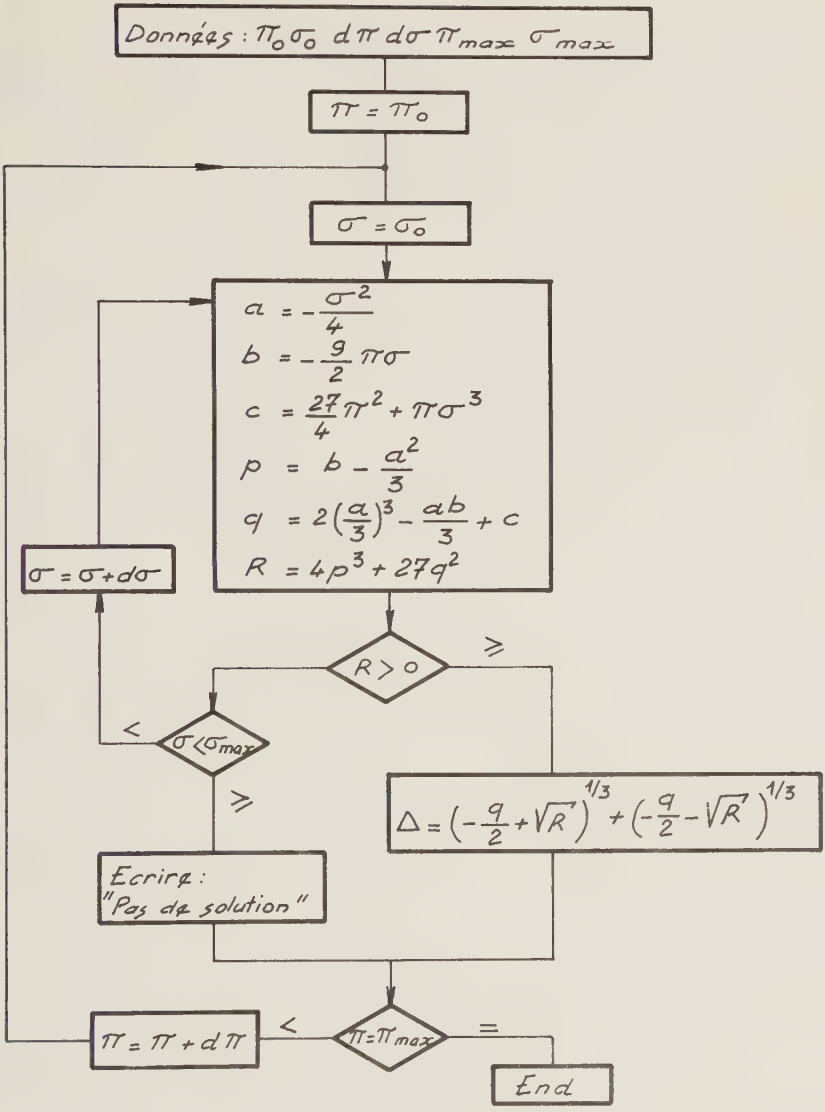
Pour $\sigma = \sigma_0$, $\pi = \pi_0$, σ_0, π_0 données, la limite de la condition (e) s'écrit

$$4\Delta^3 - \sigma_0^2\Delta^2 - 18\,\sigma_0\pi_0\Delta + \pi_0(+27\pi_0 + 4\,\sigma_0^3) = 0$$

équation algébrique du 3ème degré en Δ . Si le déterminant R est plus grand que zéro (2 racines complexes, une racine réelle), on peut calculer facilement la racine réelle par la formule de Cardan :

$$\Delta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

La figure 3-8 indique l'organigramme du programme utilisé pour la calcul des valeurs de Δ . Les limites sont ± 1 pour π, $\pm 0,5$ pour σ. D'autre part, les points du trièdre de stabilité sont calculés avec les relations (b), (c) et (d) avec $\pi = \pm 1$, et $\Delta\pi = 0,25$. Les résultats des calculs montrent qu'il est possible d'avoir des multiplicateurs complexes de module inférieur à l'unité jusqu'aux plans P_1 et P_2 .


Données : $\pi_0 \sigma_0$ $d\pi$ $d\sigma$ π_{max} σ_{max}
$\pi = \pi_0$
$\sigma = \sigma_0$
$a = -\frac{\sigma^2}{4}$
$b = -\frac{9}{2}\pi\sigma$
$c = \frac{27}{4}\pi^2 + \pi\sigma^3$
$p = b - \frac{a^2}{3}$
$q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c$
$R = 4p^3 + 27q^2$
$\sigma = \sigma + d\sigma$
$R > 0$
$\geqslant$
$<$
$\sigma < \sigma_{max}$
$\geqslant$
$\Delta = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{R}\right)^{1/3} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{R}\right)^{1/3}$
Ecrire : "Pas de solution"
$\pi = \pi + d\pi$
$<$
$\pi = \pi_{max}$
$=$
End

CHAPITRE 4

ANALYSE DU COMPORTEMENT D'UN SYSTEME CONSERVATIF NON LINEAIRE DECRIT PAR UNE EQUATION DIFFERENTIELLE DU SECOND ORDRE AVEC UN COEFFICIENT PERIODIQUE

1 - Introduction

2 - Solution analytique

2-1 - Cas où f (ω t) = + 1
2-2 - Cas où f (ω t) = - 1

3 - Interprétation des solutions partielles

3-1 - Existence des pôles
3-2 - Interprétation énergétique

4 - Etablissement des récurrences associées

4-1 - Récurrence de la solution partielle P
4-2 - Récurrences des solutions partielles M1 à M5
4-3 - Zones caractéristiques des conditions initiales

5 - Comportement du système autour de l'origine du plan de phase

5-1 - Développement en série de Taylor
5-2 - Cas d'exception

Annexe 4 A - Définitions et propriétés de base des fonctions elliptiques

Annexe 4 B - Calcul des solutions partielles quand f (ω t) = - 1 et aux différents cas de la valeur de C.

Annexe 4 C - Développements de x_{n+1} et y_{n+1}.

1 - INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement des systèmes régis par l'équation suivante :

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + d.x + d'.f(\omega t).x^3 = 0$$

qui est une équation différentielle non linéaire du second ordre à coefficient périodique et où :

x = variable
d et d' : des paramètres constants positifs
f (ω t) : fonction périodique du temps t.

Une telle équation décrit par exemple approximativement le mouvement transversal d'un particule dans un accélérateur à gradient alternatif. En effet, sous certaines conditions, le mouvement d'un particule dans un accélérateur à gradient alternatif peut être décrit séparément dans la direction longitudinale (direction d'accélération) et dans les deux directions transversales (directions de focalisation). Comme la focalisation est effectuée à l'aide d'un champ magnétique, les forces agissant sur le particule ne produisent pas de travail. Par conséquent, les équations de mouvement qui en résultent sont hamiltonniennes.

La solution analytique de (1), avec f (ω t) = + 1, c'est-à-dire :

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + d.x + d'.x^3 = 0$$

est connue. [45, 49, 51 à 54]. Elle représente une fonction périodique du temps (figure 1) dont la période $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$ et l'amplitude a_o sont fonctions

- d'une part, des conditions initiales x_o et $y_o = \frac{dx}{dt}$ (o), et
- d'autre part, des paramètres d et d'

La présence de la fonction f (ω t) comme coefficient du terme x^3 empêche d'obtenir une solution analytique exacte. Sur ce problème, ont travaillé en particulier MOSER et COLE [66, 67], mais les solutions obtenues sont approximatives.

La méthode que nous proposons consiste à trouver la solution $x^*(t)$ signal échantillonné de la solution x (t), avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$ comme période d'échantillonnage. La solution x^* (t) se présente sous la forme d'une récurrence :

(3) $$x_{n+1} = p(x_n, y_n)$$
$$y_{n+1} = q(x_n, y_n)$$

avec y = dx/dt. L'obtention de la récurrence (3) est rendue possible par la procédure suivante :

a) On prend une période de f (ω t). On partage f (ω t) en un certain nombre de branches où f(ω t) a une valeur constante. Dans le cas de l'accélérateur f (ω t) a l'allure d'un signal carré : (figure 3)

$$f(\omega t) = +1 \quad ; \quad t = nT \leq t \leq t = nT + \frac{T}{2}$$
$$f(\omega t) = -1 \quad ; \quad t = nT + \frac{T}{2} \leq t \leq (n+1)T$$

b) En appelant $x = x_n (t = nT)$, $x = x' (t = nT + \frac{T}{2})$ et $x = x_{n+1} (t = nT + T)$ et des définitions similaires pour y, on effectue une première intégration de (1) avec f (ω t) = + 1 ce qui permet d'obtenir :

(4) $$x' = x' (x_n, y_n, d, d')$$
$$y' = y' (x_n, y_n, d, d')$$

c) De même, en intégrant (1) avec f (ω t) = - 1, on obtiendra :

(5) $$x_{n+1} = x_{n+1} (x', y', d, d')$$
$$y_{n+1} = y_{n+1} (x', y', d, d')$$

d) Physiquement, il y a continuité de x et y quand f (ω t) change de valeur, ceci permet de lier (x_n, y_n) à (x_{n+1}, y_{n+1})

2 - SOLUTION ANALYTIQUE

Soit $\varepsilon = \pm 1$, nous avons à résoudre :

(6) $$\ddot{x} + d.x + d'.\varepsilon.x^3 = 0$$

Méthode générale d'intégration :

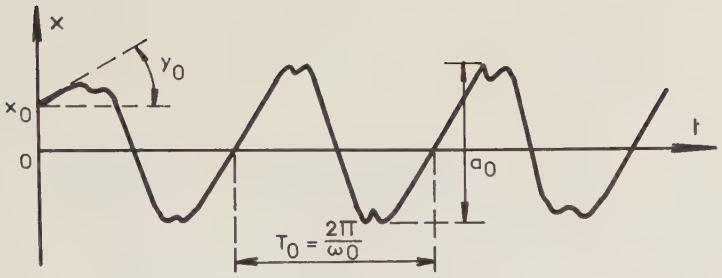


Figure 4-1 - Solution type de l'équation (2)

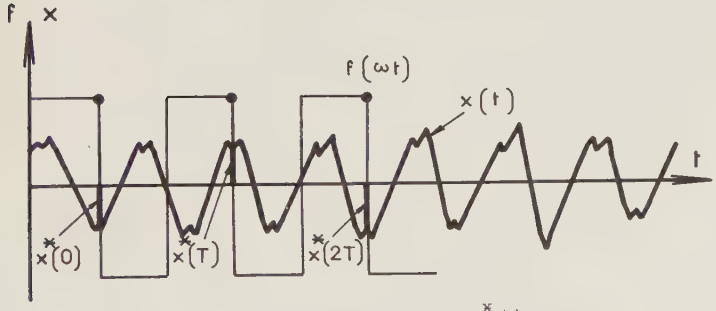


Figure 4-2 - Signal échantillonné x^* (t)

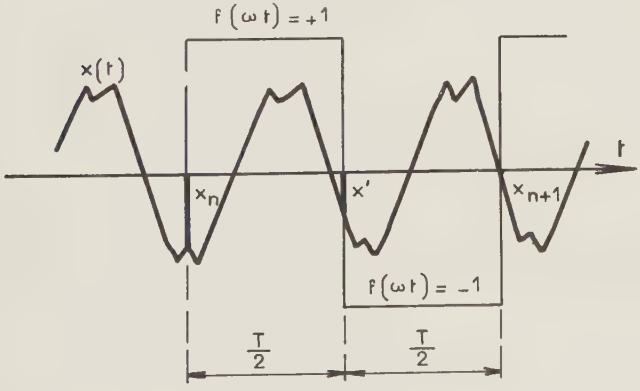


Figure 4-3 - Définition des variables de x_n et x_{n+1}

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2 \cdot \int \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \cdot dt$$

$$= 2 \cdot \int \frac{d^2x}{dt^2}\, dx$$

$$= -2 \int (d \cdot x + \varepsilon \cdot d' x^3)\, dx$$

d'où

$$\dot{x}^2 = C - d \cdot x^2 - \varepsilon \cdot \frac{d'}{2} \cdot x^4 \tag{7}$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm \left(C - d \cdot x^2 - \varepsilon \cdot \frac{d'}{2} \cdot x^4\right)^{1/2} \tag{7}'$$

$$dt = \pm \frac{dx}{\left(C - d \cdot x^2 - \varepsilon \cdot \frac{d'}{2} \cdot x^4\right)^{1/2}}$$

En intégrant :

$$t - t_0 = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{C - d \cdot x^2 - \varepsilon \cdot \frac{d'}{2} \cdot x^4}} \tag{8}$$

Par changement de variable, l'intégrale (8) se ramène à une intégrale élliptique de première espèce. On peut donc exprimer x en fonction de t au moyen des fonctions elliptiques. La forme exacte de la solution x (t) dépend de d, d', ε et C.

Précisons que nous ne cherchions que les solutions réelles de l'équation (1).

2-1 - Cas où $f(\omega t) = +1$

Dans ce cas l'équation (7) s'écrit :

$$\dot{x}^2 = -\frac{d'}{2} \cdot x^4 - d \cdot x^2 + C \tag{9}$$

Si la constante d'intégration C est nulle ou négative, la seule solution réelle est x = 0. Nous supposons donc la constante C positive. En supposant d'autre part d' >0, d > 0, le discriminant du trinôme du second membre ($d^2 + 2Cd'$) est positif. Posons :

$$q_1 = \frac{\sqrt{d^2+2Cd'} + d}{d'} > 0 , \qquad q_2 = \frac{\sqrt{d^2+2Cd'} - d}{d'} > 0$$

l'équation (9) s'écrit

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = +\frac{d'}{2}(q_1+x^2)(q_2-x^2)$$

d'où

$$\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{d'}{2}}\, dt = \frac{dx}{\sqrt{(q_1+x^2)(q_2-x^2)}} , \qquad \varepsilon = \pm 1$$

Nous allons ramener le polynôme figurant sous le radical à la forme canonique $(1-z^2)(1-kz^2)$ par les transformations suivantes [53]

Première transformation

Posons $x^2 = q_2 - y^2$ d'où $2x\,dx = -2y\,dy$

et $dx = \dfrac{\varepsilon' y\,dy}{\sqrt{q_2-y^2}} , \qquad \varepsilon' = \pm 1$

D'où

$$\varepsilon\sqrt{\frac{d'}{2}}\,dt = \frac{\varepsilon' y\,dy}{\sqrt{(q_2-y^2)(q_1+q_2-y^2)(y^2)}} = \frac{\varepsilon'\,dy}{\sqrt{(q_2-y^2)(q_1+q_2-y^2)}}$$

Deuxième transformation

Posons $y = \sqrt{q_2}\cdot z$ d'où $dy = \sqrt{q_2}\,.\,dz$

$$\varepsilon\sqrt{\frac{d'}{2}}\,dt = \frac{\sqrt{q_2}\,.\,dz}{\sqrt{(q_2-q_2z)(q_1+q_2-q_2z^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{q_2}\,.\,dz}{\sqrt{q_2(1-z^2)(q_2+q_1)\left(1-\frac{q_2}{q_1+q_2}z^2\right)}}$$

Posons $k = \sqrt{\frac{q_2}{q_2+q_1}} < 1$, $\sigma = \sqrt{\frac{d}{2}(q_1+q_2)}$

l'équation précédente devient

$$\varepsilon \sigma dt = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

dont la solution est : $z = \varepsilon . sn(\sigma t + C_1)$

Revenons aux variables y puis x :

$$y = \varepsilon \sqrt{q_2}\, sn(\sigma t + C_1)$$

$$x^2 = q_2 - q_2 sn^2(\sigma t + C_1) = q_2\, cn^2(\sigma t + C_1)$$

(10)

$$x = \pm\sqrt{q_2} . cn(\sigma t + C_1)$$

2-2 - Cas où $f(\omega t) = -1$

Dans ce cas l'équation (7) s'écrit :

(11) $$\dot{x}^2 = +\frac{d'}{2}x^4 - d.x^2 + C$$

La forme exacte de la solution x(t) va dépendre :

a) du signe du déterminant $\Delta = d^2 - 2Cd'$, ou, ce qui revient au même, de la valeur de C par rapport à $d^2/2d'$

b) du signe du produit des racines $P = \frac{2C}{d'}$ ou, d' étant toujours un paramètres positif, du signe de C.

Nous distinguerons cinq cas :

$$C > \frac{d^2}{2d'} > 0 \; ; \quad C = \frac{d^2}{2d'} \; ; \quad 0 < C < \frac{d^2}{2d'} \; ; \quad C = 0 \; ; \quad C < 0$$

Pour chacun de ces cas, nous écrivons

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = F(x)$$

et nous utilisons des transformations appropriées pour amener F (x) à la forme canonique : $\sigma(1-z^2)(1-k^2z^2)$

A partir de cette dernière, nous obtenons la solution z (t), et par suite, la solution x (t) par l'inverse des transformations utilisées (détails des calculs, voir Annexe 4 B).

Désignons par

a) P, le nom de la solution partielle x (t) au cas où f (ω t) = + 1

b) M_1 à M_5, les noms des solutions partielles x (t) au cas où f (ω t) = - 1, et respectivement pour les valeurs de C des cinq cas étudiés.

La solution complète de x (t) est constituée par des solutions partilles changeant périodiquement (période $T = \frac{2\pi}{\omega}$) de types qui sont :

a) la sous-solution P quand f (ω t) change de - 1 à + 1

b) l'une des solutions partielles M_1 à M_5 quand f (ω t) change de + 1 à - 1 et selon la valeur de la constante d'intégration C.

Les six solutions partielles P, M_1 à M_5, sont résumées dans la Table 1

Table 1 - Résumé des solutions partielles

Problème : $\ddot{x} + d.x + d'.f(\omega t).x^3 = 0$; $d>0$, $d'>0$, $\omega>0$ $C = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + d.x^2 + \frac{d'}{2}.f(\omega t).x^4$		
	$f(\omega t) = +1$	
P. - $C>0$	$x = \sqrt{q_2}\, cn(k, \sigma t + C_1)$	$q_{1,2} = \frac{\pm d + \sqrt{d^2 + 2Cd'}}{d'}$, $k = \sqrt{\frac{q_2}{q_1+q_2}}$, $\sigma = \sqrt{\frac{d'}{2}(q_1+q_2)}$
	$f(\omega t) = -1$	
M1. - $C > \frac{d^2}{2d'}$	$x = \left(\frac{2C}{d'}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{j\, sn(k,u) - \varepsilon\, cn(k,u)}{j\, sn(k,u) + \varepsilon\, cn(k,u)}$ $\varepsilon = \pm 1$, $u = \sigma t + C_1$	$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{d}{\sqrt{2Cd'}}\right)}$ $j = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$, $k = \sqrt{1-j^4}$ $\sigma = (C\frac{d'}{2})^{\frac{1}{4}} \cdot (1+\alpha)$
M2. - $C = \frac{d^2}{2d'}$	$x = \pm\sqrt{\frac{d}{d'}}\, th(\sigma t + C_1)$ si $\lvert x\rvert < a$ $x = \pm\sqrt{\frac{d}{d'}}\, coth(\sigma t + C_1)$ si $\lvert x\rvert > a$	$\sigma = \sqrt{\frac{d'}{2}}$, $a^2 = \frac{d}{d'} > 0$
M3. - $0 < C < \frac{d^2}{2d'}$	$x = \pm\sqrt{q_2}\, sn(k, \sigma t + C_1)$ si $x^2 < q_1$ $x = \pm\sqrt{q_1}\, \frac{dn(k, \sigma t + C_1)}{cn(k, \sigma t + C_1)}$ si $x^2 > q_1$	$q_{1,2} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 2Cd'}}{d'}$ $k = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$, $\sigma = \sqrt{\frac{d'}{2}q_1}$
M4. - $C = 0$	$x = \sqrt{\frac{2d}{d'}}\, \frac{1}{\cos(\sigma t + C_1)}$	$\sigma = \sqrt{d}$
M5. - $C < 0$	$x = \sqrt{q_1} \cdot \frac{1}{cn(k, \sigma t + C_1)}$	$q_{1,2} = \frac{\sqrt{d^2 - 2Cd'} \pm d}{d'}$ $k = \sqrt{\frac{q_2}{q_1+q_2}}$, $\sigma = \sqrt{\frac{d'}{2}(q_1+q_2)}$

3 - INTERPRETATION DES SOLUTIONS PARTIELLES

Deux conclusions principales peuvent être tirées concernant les solutions partielles obtenues précédemment :

a) le nombre de solutions partielles est fini

b) le nombre de solutions partielles trouvées est exhaustif

(dans le cadre des hypothèses actuelles des valeurs de d, d' et f (ω t)

Toutefois, malgré la connaissance des expressions analytiques des solutions partielles nous ne pouvons pas connaître la forme de x (t) pour toutes les valeurs de t. Cette dernière dépend en effet de :

a) la solution partielle M_i, $i = 1,\cdots,5$ choisie au changement + 1 à - 1 de f (ω t)

b) la valeur de x et de y = dx/dt au moment du changement

c) la période $T = 2\pi/\omega$ qui, pour une forme donnée de la solution partielle conduit à des valeurs différentes de x et y au moment du changement.

Pour l'étude complète de x (t) , $\forall t$, nous aurons donc recours aux récurrences associées comme nous le verrons au paragraphe suivant. Auparavant, nous dégagerons quelques propriétés des solutions partielles d'après leur expression analytique.

3-1 - Existence des pôles

La forme générale des solutions partielles est :

L'amplitude de x (t) devient infinie si x (u) admet un ou des pôles pour certaines valeurs de u. Considérons les formes analytiques de ces solutions partielles (table 1) qui sont des combinaisons de sn (u), cn (u), et dn (u), th u. En nous basans sur la connaissance de ces dernières fonctions, nous cons-

tatons que :

P : pas de pôles

M_1 : périodiquement, pôles à $u = \frac{(2m-1)K}{2}$ (figure 4-4), m entier

M_2 : (a) thu est limitée à ± 1 tandis que
(b) coth u = ∞ pour u = o

M_3 : (a) sn (k, u) n'a pas de pôle
(b) $\frac{dn(k,u)}{cn(k,u)}$ pôles périodiques à u = (m-1) K, m entier

M_4 : périodiquement, pôle à u = 2 m π, m entier

M_5 : périodiquement, pôles à u = (2m-1).K, m entier, K la période des solutions elliptiques pour f (ω t) = - 1 : quantité fondamentale.

Dans le cas des solutions partielles M_1, M_{2b}, M_{3a}, M_4 et M_5, si la période T de f (ω t) est plus grande que K : $T > K$, x(t) peut prendre une valeur infinie.

3-2 - Interprétation énergétique

Reécrivons les équations que nous étudions :

(12) $$\ddot{x} + d.x + d'.\varepsilon.x^3 = 0$$

qui peut être ramenée au 1er ordre sous la forme de :

(13) $$\dot{x}^2 = C - d.x^2 - \varepsilon.\frac{d'}{2}.x^4$$

où C est une constante d'intégration. Remarquons que la valeur de C est déterminée par les conditions initiales x_o, y_o (y = dx/dt) par l'expression

(14) $$C = y_o^2 + d.x_o^2 + \varepsilon\frac{d'}{2}x_o^4$$

Par conséquent, pour des valeurs x_o, y_o données C est une constante.

Sous sa forme (12), la solution x (t) caractérise l'évolution de x par rapport au temps (comportement dynamique). Sous sa forme (13), la solution x (t) caractérise le comportement énergétique du système. En effet, le terme x^2 est proportionnel à l'énergie cinétique, tandis que le terme (intégrale de mouvement) $V(x) = d.x^2 + \varepsilon.\frac{d'}{2}.x^4$ représente l'énergie potentielle pendant l'intervalle où f (ω t) - cte. Quelle que soit la valeur de x (t) dans le temps, elle doit être telle que la conservation de l'énergie soit respectée. Cette énergie conservée étant C, qui est donc, à un coefficient m/2 près, l'énergie totale de la particule :

(15) $$C = \dot{x}^2 + V(x)$$

Remarquons que :

1° - C étant constante

2° - x^2 étant défini positif nous avons

(16) $$V(x) \leqslant C \quad \forall t$$

Ces considérations énergétiques nous permettent de prévoir certaines propriétés qualitatives du comportement dynamique du système. Distinguons 2 cas suivant le signe de ε.

a) $\varepsilon = +1 \quad (f(\omega t) = +1)$

La constante C est positive quelles que soient les conditions initiales d'après (14). La fonction V (x) est représentée par la figure 5a. Le domaine des x possibles définis par l'équation (16) est $[+x_a, -x_a]$ abscisses des points d'intersection de C = constante et de V (x) = C. Le mouvement est borné dans l'espace, il est toujours stable.

b) $\varepsilon = -1 \quad (f(\omega t) = -1)$

La constante C peut être de signe quelconque. Le tracé de V (x) est représenté par la figure 5 b. Nous voyons que le mouvement peut prendre ou non une amplitude infinie selon =

1° la valeur de C

2° la valeur de x_o

En effet, examinons par exemple le cas $C < \frac{d^2}{2d'}$, si x_o est dans l'intervalle $[-\sqrt{d/d'}, +\sqrt{d/d'}]$, le mouvement est stable ($V(x) \leq C \Rightarrow$ x ne peut pas dépasser les points P et P'). Par contre si $x_o \in]-\sqrt{d/d'}, +\sqrt{d/d'}[$, le mouvement est instable. On peut retrouver les résultats déduits de l'interprétation (existence de pôle) des solutions analytiques.

4 - ETABLISSEMENT DES RECURRENCES ASSOCIEES

Les solutions analytiques établies au paragraphe 2 sont des solutions exactes. Pour des valeurs données de d, d', ω, et de conditions initiales x_o, y_o, elles permettent de calculer la solution x (t), t aussi grand que l'on veut. Cela permet donc la vérification du comportement de x (t), t aussi grand que l'on veut, en effectuant des calculs directs.

Toutefois ces solutions analytiques ne permettent pas de connaître les propriétés générales telles que :

- l'existence et la nature des points singuliers
- les frontières de stabilité
- l'existence et la nature des cas critiques.

Pour cela il est nécessaire d'établir les relations de récurrence qui sont associées à ces solutions. Redéfinissons f (ω t) (figure 6)

$$f(\omega t) = +1 \quad \text{pour} \quad t_0 + n\frac{2\pi}{\omega} \leqslant t \leqslant t_0 + n\frac{2\pi}{\omega} + \frac{\pi}{\omega}$$

$$f(\omega t) = -1 \quad \text{pour} \quad t_0 + n\frac{2\pi}{\omega} + \frac{\pi}{\omega} \leqslant t \leqslant t_0 + (n+1)\frac{2\pi}{\omega}$$

(t_0 donné)

Posons :

$$y = dx/dt$$

$$t_n = t_0 + \frac{2n\pi}{\omega} \quad ; \quad t_{n+1} = t_0 + (2n+1)\frac{\pi}{\omega}$$

$x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ conditions initiales données

$x_n = x(t_n)$, valeur pour t = t_n de la solution x (t) satisfaisant les conditions initiales

$y_n = y(t_n)$, dérivée de x (t) pour t = t_n

$x' = x(t'_n)$

$y' = y(t'_n)$

$x_{n+1} = x(t_{n+1})$

$y_{n+1} = y(t_{n+1})$

4-1 - Récurrence de la solution partielle P : f (ω t) = + 1

Les grandeurs x'_n et y'_n sont reliées à celles de x_n et y_n par la suite des équations suivantes. Notons qu'il est impossible d'obtenir des relations explicites uniques

$$C = y_n^2 + d.x_n^2 + \frac{d'}{2}.x_n^4$$

$$q_{1} = \frac{d + \sqrt{d^2 + 2Cd'}}{d'} \quad , \quad q_{2} = \frac{-d + \sqrt{d^2 + 2Cd'}}{d'}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{d'}{2}(q_1 + q_2)} \quad , \quad k = \sqrt{\frac{q_2}{q_1 + q_2}}$$

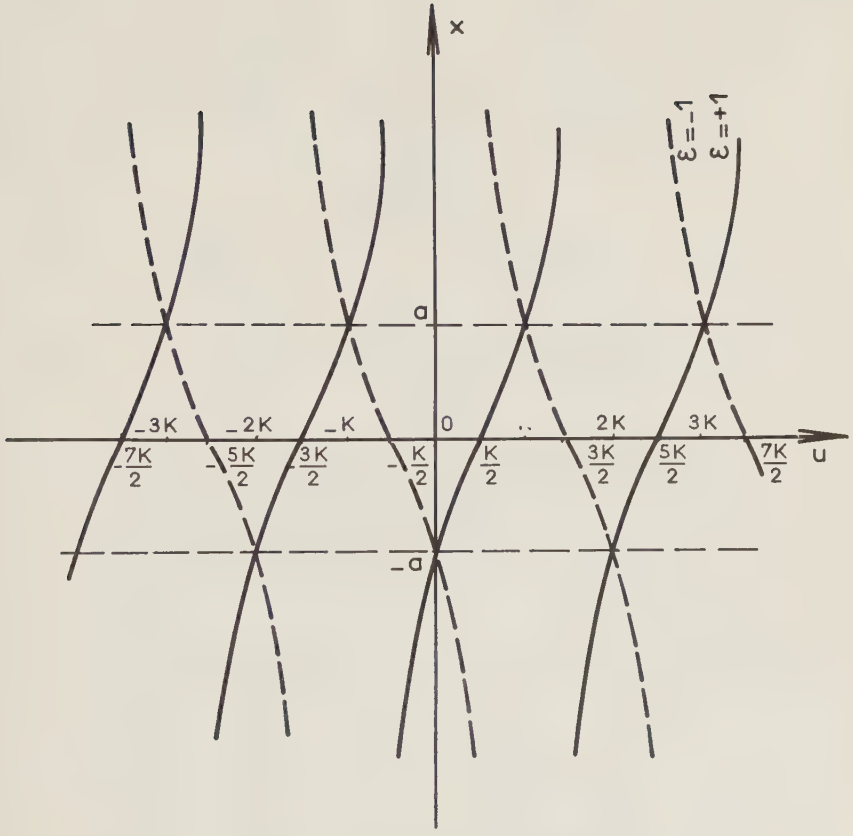


Figure 4-4 - Fonction $x = a \frac{j\,sn\,u - \varepsilon\,cn\,u}{j\,sn\,u + \varepsilon\,cn\,u}$

$k = \sqrt{1 - j^4}$; $\varepsilon = \pm 1$

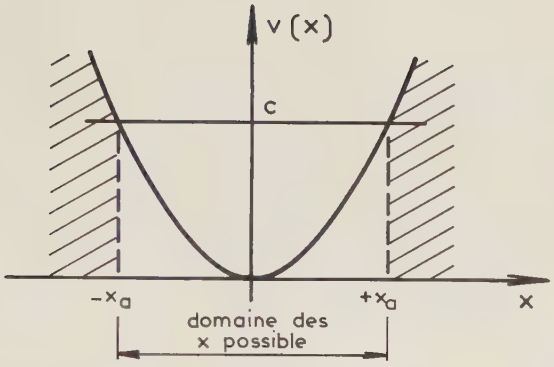


Figure 4-5a - Domaine des x possibles quand $\varepsilon = +1$

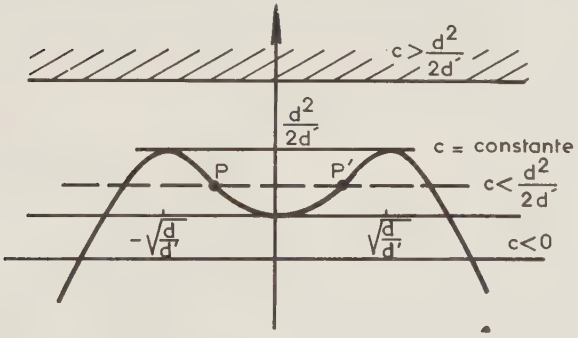


Figure 4-5b - Domaine des x possibles quand $\varepsilon = -1$

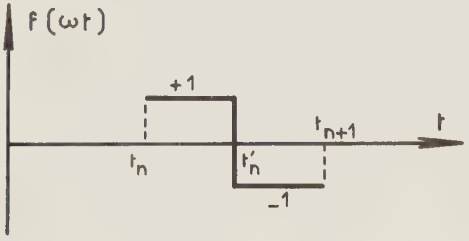


Figure 4-6 - Définition de f (ω t)

$$\left.\begin{array}{l} x_n = \sqrt{q_2}\cdot cn\,u \\ sign\,u = -\,sgn\,y_n \end{array}\right\}$$ déterminant de façon unique $u \in\ ]-2K, +2K]$

(17)
$$\begin{cases} x'_n = \sqrt{q_2}\,cn\left(u + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right) \\ y'_n = -\sigma\sqrt{q_2}\,sn\left(u+\frac{\sigma'\pi}{\omega}\right) dn\left(u+\frac{\sigma'\pi}{\omega}\right) \\ C' = y'^2_n + d.\,x'^2_n - \frac{d'}{2}.\,x'^4_n \end{cases}$$

4-2 - Récurrence des solutions partielles M_1 à M_5 : $f(\omega t) = -1$

Les grandeurs x_{n+1} et y_{n+1} sont reliées à celles de x'_n et y'_n par l'une des solutions partielles M_1 à M_5 dont le choix dépend de la valeur de C'

Solution partielle M_1 : $C' > d^2/2d'$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{d}{\sqrt{2C'd'}}\right)}\quad , \quad j = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$$
$$\sigma' = \left(C'\frac{d'}{2}\right)^{\frac{1}{4}}.\,(1+\alpha)\quad , \quad k = \sqrt{1-j^4}$$

$$\left.\begin{array}{l} x'_n = \left(\frac{2C'}{d'}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{j\,sn\,u' - \varepsilon\,cn\,u'}{j\,sn\,u' + \varepsilon\,cn\,u'} \\ \varepsilon = sgn\,y'_n \end{array}\right\}$$ déterminant de façon unique $u' \in\ ]-K, +K]$

(18)
$$x_{n+1} = \left(\frac{2C'}{d'}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{j\,sn\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right) - \varepsilon\,cn\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right)}{j\,sn\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right) + \varepsilon\,cn\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right)}$$
$$y_{n+1} = 2\sigma'\left(\frac{2C'}{d'}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\varepsilon.j.dn\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right)}{\left[j\,sn\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right) + \varepsilon\,cn\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right)\right]^2}$$

Solution partielle M_2 : $C' = d^2/2d'$

$$\sigma' = \sqrt{\frac{d'}{2}}$$

a) $x_n'^2 < d/d'$

$$\left.\begin{aligned} x_n' &= \varepsilon \sqrt{\frac{d}{d'}}\, \mathrm{th}\, u' \\ \varepsilon &= \mathrm{sgn}\, y_n' \end{aligned}\right\} \text{déterminant u' de façon unique}$$

(19)
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \varepsilon \sqrt{\frac{d}{d'}}\, \mathrm{th}\left(u' + \frac{\sigma' \pi}{\omega}\right) \\ y_{n+1} &= \varepsilon \sigma' \sqrt{\frac{d}{d'}}\, \frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(u' + \frac{\sigma' \pi}{\omega}\right)} \end{aligned}$$

b) $x_n'^2 > d/d'$

$$\left.\begin{aligned} x_n' &= \varepsilon \sqrt{\frac{d}{d'}}\, \coth u' \\ \varepsilon &= -\mathrm{sgn}\, y_n' \end{aligned}\right\} \text{déterminant u' de façon unique}$$

(20)
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \varepsilon \sqrt{\frac{d}{d'}}\, \coth\left(u' + \frac{\sigma' \pi}{\omega}\right) \\ y_{n+1} &= -\varepsilon \sigma' \sqrt{\frac{d}{d'}}\, \frac{1}{\mathrm{sh}^2\left(u' + \frac{\sigma' \pi}{\omega}\right)} \end{aligned}$$

c) $x_n'^2 = d/d'$

Ce qui implique que : $x = c^{te} = \sqrt{d/d'}$

D'après $C' = d^2/2d' = y_n'^2 + d.x_n'^2 - \frac{d'}{2} x_n'^4$, ce cas entraîne $y_n' = 0$ et par suite $C = 3d^2/2d'$. Ce cas peut se produire. Par exemple $x_n = 0$ et $y_n = \sqrt{\frac{3d^2}{2d'}}$ avec $\omega = \frac{\pi\sqrt{2d}}{K}$, $K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$

Solution partielle M_3 : $0 < C' < d^2/2d'$

$$q_1' = \frac{d + \sqrt{d^2 - 2C'd'}}{d'} \quad , \quad q_2' = \frac{d - \sqrt{d^2 - 2C'd'}}{d'}$$

$$\sigma' = \sqrt{\frac{d'}{2} q_1'} \quad , \quad k = \sqrt{\frac{q_2'}{q_1'}}$$

a) $x_n'^2 \geq q_1'$

$$\left.\begin{aligned} x_n' &= \sqrt{q_2'}\,\frac{dn\,u'}{cn\,u'} \\ sgn\,u' &= sgn\,y_n' \end{aligned}\right\} \text{ déterminant de façon unique } u' \in]-2K, +2K]$$

(21)
$$x_{n+1} = \sqrt{q_1'}\,\frac{dn\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right)}{cn\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right)}$$
$$y_{n+1} = \sigma'\sqrt{q_1'}\,(1-\bar{k}^2)\,\frac{sn\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right)}{cn\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right)}$$

b) $x_n'^2 \leq q_2'$

$$\left.\begin{aligned} x_n' &= \sqrt{q_2'}\,sn\,u' \\ y_n' &= \sigma'\sqrt{q_2'}\,cn\,u'\,dn\,u' \end{aligned}\right\} \text{ déterminant de façon unique } u' \in]-2K, +2K]$$

(22)
$$x_{n+1} = \sqrt{q_2'}\,sn\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right)$$
$$y_{n+1} = \sqrt{q_2'}\,\sigma'\,cn\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right)\,dn\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right)$$

Le cas $q_2' < x_n'^2 < q_1'$ ne peut se produire compte tenu de

$$C' = y_n'^2 + d.x_n'^2 - \frac{d'}{2}x_n'^4 \quad \text{et} \quad 0 < C' < \frac{d^2}{2d'}$$

Solution partielle M_4 : $C' = 0$

Dans ce cas l'équation $C' = y_n'^2 + d.x_n'^2 - \frac{d'}{2}.x_n'^4 = 0$ implique $x_n'^2 < 2d/d'$

$$\left.\begin{aligned} x_n' &= \sqrt{\frac{2d}{d'}}\cdot\frac{1}{\cos u'} \\ sgn\,u' &= sgn\,y_n' \end{aligned}\right\} \text{ déterminant de façon unique } u' \in]-\pi, +\pi]$$

(23)
$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{2d}{d'}}\cdot\frac{1}{\cos\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right)}\,, \quad \sigma' = \sqrt{d}$$
$$y_{n+1} = \sigma\sqrt{\frac{2d}{d'}}\,\frac{\sin\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right)}{\cos\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right)}$$

Solution partielle M_5 : $C' < 0$

Dans ce cas nous avons : $x'^2_n > q'_{11}$

$$q'_{11} = \frac{d + \sqrt{d^2 - 2C'd'}}{d'} \quad , \quad q'_{12} = \frac{-d + \sqrt{d^2 - 2C'd'}}{d'}$$

$$\sigma' = \sqrt{\frac{d'}{2}(q'_{11} + q'_{12})} \qquad k = \sqrt{\frac{q'_{12}}{q'_{11} + q'_{12}}}$$

$$\left.\begin{aligned} x'_n &= \frac{\sqrt{q'_{11}}}{cn\, u'} \\ sgn\, u' &= sgn\, y'_n \end{aligned}\right\} \text{ déterminant de façon unique}$$

(24)

$$x_{n+1} = \sqrt{q'_{11}}\, \frac{1}{cn\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right)}$$

$$y_{n+1} = \sigma' \sqrt{q'_{11}}\, \frac{sn\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right).dn\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right)}{cn^2\left(u' + \frac{\sigma'\pi}{\omega}\right)}$$

4-3 - Zones caractéristiques de conditions initiales

Dans le cas $f(\omega t) = -1$, la forme de la solution partielle dépend de la valeur de la constante d'intégration

$$C = y^2 - \frac{d'}{2}x^4 + d.x^2$$

c'est-à-dire des conditions initiales (x_o, y_o) à l'instant t_o. Le calcul montre qu'il y a cinq cas à distinguer, selon la valeur de C par rapport

- à $d^2/2d'$ d'une part
- et à 0 de l'autre

c'est-à-dire , en fonction des conditions initiales

$$y_o^2 - \frac{d'}{2}.x_o^4 + d.x_o^2 > \frac{d^2}{d'} \quad , \quad < \frac{d^2}{d'} \quad , \quad = \frac{d^2}{d'}$$

$$y_o^2 - \frac{d'}{2}.x_o^4 + d.x_o^2 > 0 \quad , \quad < 0 \quad , \quad = 0$$

Chaque cas correspond à une zone du plan (x, y)

Opérons en variables réduites en posant :

$$x = X\sqrt{\frac{d}{d'}} \quad , \quad y = Y\frac{d}{\sqrt{d'}}$$

La constante C devient :

(25)

$$C = \frac{d^2}{d'}\left(Y^2 - \frac{1}{2}X^4 + X^2\right)$$

a) Zones $C >, =, < d^2/2d'$

En fonction des conditions initiales X_0, Y_0, la condition $C = d^2/2d'$ s'écrit :

$$Y_0^2 - \frac{1}{2} X_0^4 + X_0^2 = \frac{1}{2}$$

L'équation

$$Y^2 - \frac{1}{2} X^4 + X^2 - \frac{1}{2} = 0 \qquad (26)$$

représente une quadratique ; mais le déterminant du trinôme :

$$Y^2 = \frac{1}{2} X^4 - X^2 + \frac{1}{2}$$

étant nul, elle se décompose en deux paraboles

$$Y = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} (X^2 - 1)$$

D'où les trois premières zones cherchées comme l'indique la figure 7

b) Zones $C >, =, < 0$

$$Y_0^2 = \frac{X_0^2}{2} (X_0^2 - 2) \qquad \text{(zone C = 0)} \qquad (27)$$

$$Y_0 = \pm \frac{X_0}{\sqrt{2}} \sqrt{X_0^2 - 2}$$

$$\frac{dY}{dX} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{X^2 - 2} + \frac{X \cdot 2X}{2\sqrt{X^2 - 2}} \right] = \pm \frac{2(X^2 - 1)}{\sqrt{2(X^2 - 2)}}$$

Les trois zones $C > 0$, $C = 0$; $C < 0$ ont l'allure indiquée sur la figure 8. Les courbes $C = d^2/2d'$ et $C = 0$ sont asymptotes à l'infini

$$\left[\frac{X}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{X^2 - 2} \right) \right] - \left[\frac{X^2 - 1}{\sqrt{2}} \right] = \frac{X^2}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{1}{X^2} + \cdots \right] - \frac{X^2}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{1}{X^2} \right] = \varepsilon(X) \underset{X \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

La réunion des six zones précédentes donne cinq zones, comme le montre la figure 9.

4-4 - Programme de calcul des récurrences

Un programme de calcul numérique de la solution de (1) a été mis au point Comme sous routine, il utilise principalement :

1° - le calcul de x = sn (u, k) connaissant l'argument u et le paramètre k

2° - le calcul de z en résolvant sn (z, k) = a connaissant a et k·

3° - le calcul de cn et dn d'après les formules données en Annexe 3 B.

A chaque demi période de la fonction f (ω t) on calcule la valeur de

$$C = y^2 - \frac{d'}{2} x^4 + d.x^2$$

Selon la valeur relative de C par rapport à $d^2/2d'$, on utilise l'une des cinq récurrences correspondant à l'une des cinq solutions partielles M_1 à M_5

5 - COMPORTEMENT DU SYSTEME AUTOUR DE L'ORIGINE DU PLAN DE PHASE

Les récurrences associees établies au paragraphe précédent, même sous forme de relations implicites entre (x_{n+1}, y_{n+1}) et (x_n, y_n) , permettent, par calculs numériques, de connaître le comportement précis du système dans tous les cas de conditions initiales.

Dans certaines circonstances toutefois, on peut connaître le comportement qualitatif du système sans avoir recours au calcul direct des solutions. Par exemple : stabilité des cas critiques, phénomènes de résonance paramétrique des cas d'exception [18, 19, 20, 28] . Pour cela, il est nécessaire d'avoir des relations explicites de x_{n+1}, y_{n+1} par rapport à x_n, y_n sous forme de développement polynomial.

5-1 - Développement en série de Taylor .

Nous avons calculé un développement explicite de (x_{n+1}, y_{n+1}) par rapport à (x_n, y_n) sur la base des séries de Taylor*. Les conclusions que nous pourrons tirer de ce développement ne sont en principe valables que dans la mesure où ce dernier est convergent.

Soit $\Delta = \frac{T}{2}$ la demie période de la fonction $f(\omega t) = f(\frac{2\pi t}{T})$, nous avons

$$x' = x(nT+\Delta) = x(nT) + \Delta \frac{dx_n}{dt} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{d^2x_n}{dt^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{d^3x_n}{dt^3} + \dots$$

(28)

$$y' = y(nT+\Delta) = y(nT) + \Delta \frac{dy_n}{dt} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{d^2y_n}{dt^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{d^3y_n}{dt^3} + \dots$$

$$x_{n+1} = x(nT+2\Delta) = x' + \Delta \frac{dx'}{dt} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{d^2x'}{dt^2} + \dots$$

(29)

$$y_{n+1} = y(nT+2\Delta) = y' + \Delta \frac{dy'}{dt} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{d^2y'}{dt^2} + \dots$$

* L'idée d'un tel développement est due à Monsieur VICAIRE

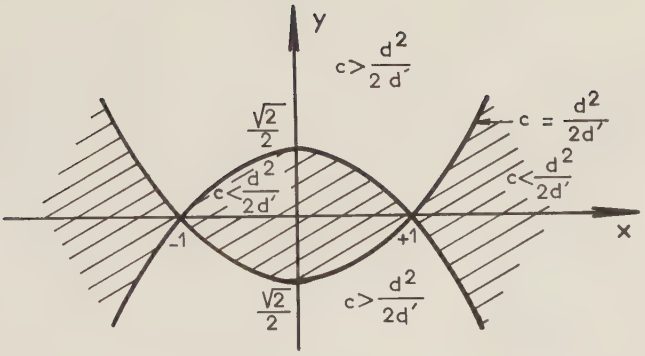


Figure 4-7 - Zones de C par rapport à $d^2/2d'$
($C < d^2/2d'$ = zone hachurée)

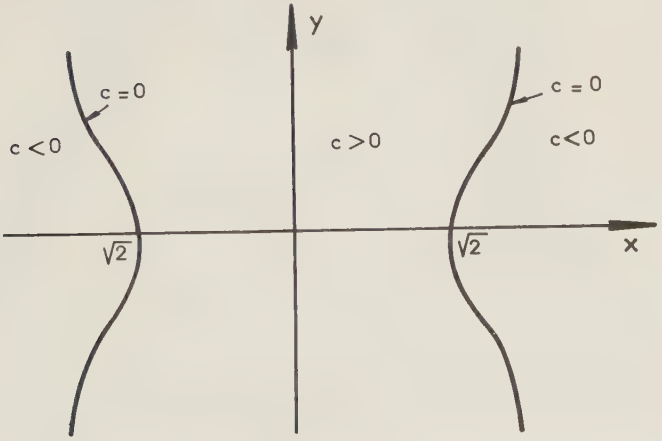
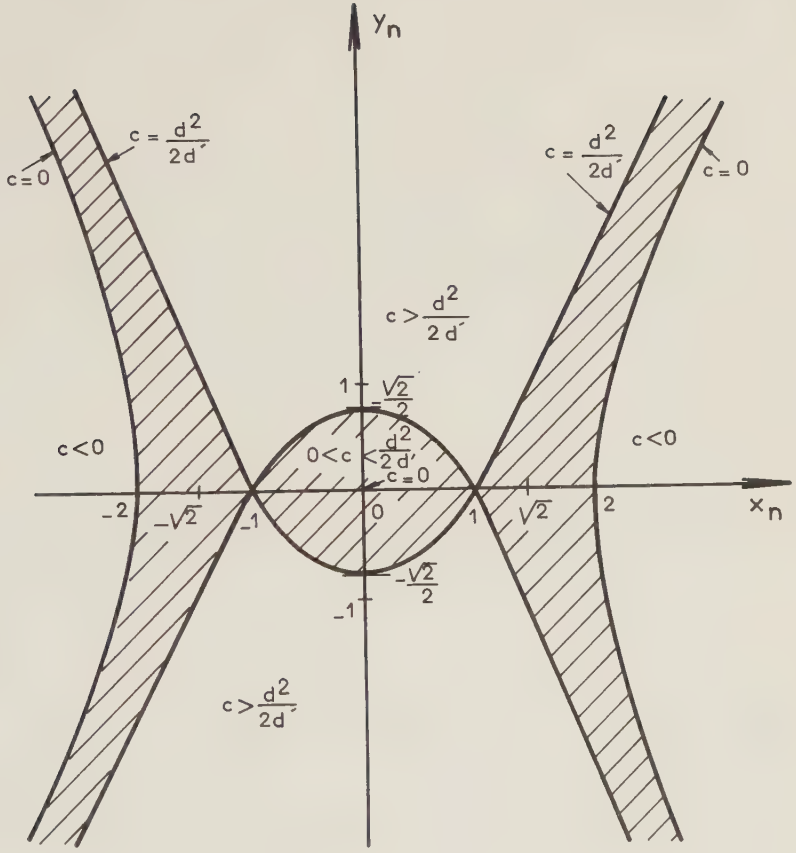


Figure 4-8 - Zones de C par rapport à zéro



$$c = \frac{d^2}{2d'}\left(2Y_0^2 - X_0^4 + 2X_0^2\right) = y_0^2 - \frac{d'}{2}x_0^4 + dx_0^4$$

$$x = X\sqrt{\frac{d}{d'}}$$

$$y = Y\frac{d}{\sqrt{d'}}$$

Figure 4-9 - Zones caractéristiques des conditions initiales

Les différentes dérivées sont calculées à l'aide de l'équation différentielle

$$\ddot{X} + d.X + d'.f(\omega t).X^3 = 0 \qquad (30)$$

avec $f(\omega t) = +1$ pour les dérivées dans x' et y'

et $f(\omega t) = -1$ pour les dérivées dans x_{n+1} et y_{n+1}

Pour simplifier les écritures, nous avons utilisé les variables réduites :

$$X = x\sqrt{\frac{d}{d'}} \quad ; \quad Y = \frac{dX}{dt} = y\sqrt{\frac{d^2}{d'}} \quad ; \quad t' = t\,\frac{1}{\sqrt{d}}$$

de sorte que le calcul des dérivées utilise l'équation

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0 \quad ; \quad \varepsilon = \pm 1 \qquad (31)$$

Les détails des calculs sont contenus dans l'Annexe 4 C. La récurrence développée jusqu'aux termes du 3ème degré, se présente comme suit :

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n.\cos 2\Delta + y_n.\sin 2\Delta \\
&+ x_n^3\left[(S_{30}-S_{12})\sin^2\Delta\cos\Delta + R_{30}\sin\Delta + S_{21}\sin\Delta\cos^2\Delta + S_{03}\sin^3\Delta\right] \\
&+ x_n^2 y_n\left[(R_{21}-S_{12})\sin\Delta + 3(S_{12}-S_{30})\sin\Delta\cos^2\Delta + 3(S_{21}-S_{03})\sin^2\Delta\cos\Delta\right] \\
&+ x_n y_n^2\left[(R_{12}+S_{21})\sin\Delta + 3(S_{12}-S_{30})\sin^2\Delta\cos\Delta + \right. \\
&\qquad \left. + 3(S_{03}-S_{21})\sin\Delta\cos^2\Delta\right] \\
&+ y_n^3\left[(S_{03}-S_{21})\sin^2\Delta\cos\Delta + R_{03}\sin\Delta - S_{30}\sin^3\Delta - S_{12}\sin\Delta\cos^2\Delta\right] \\
&+ x_n^5\left[\cdots\right] + \cdots
\end{aligned} \qquad (32)$$

Remarque : La solution de (1) et la solution (32) + (33) ne sont pas tout à fait identifiques. La première à des dérivées secondes discontinues. La seconde a tou[illegible] les dérivées continues.

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= x_n \sin 2\Delta + y_n \cos 2\Delta \\
&+ x_n^3 \left[-S_{30} \sin\Delta + (R_{30} - R_{12}) \sin^2\Delta \cos\Delta + R_{21} \sin\Delta \cos^2\Delta + R_{03} \sin^3\Delta \right] \\
&+ x_n^2 y_n \left[3(R_{12} - R_{30}) \sin\Delta \cos^2\Delta + 3(R_{21} - R_{03}) \sin^2\Delta \cos\Delta \right. \\
&\qquad \left. - (R_{12} + S_{21}) \sin\Delta \right] \qquad (33) \\
&+ x_n y_n^2 \left[3(R_{03} - R_{21}) \sin\Delta \cos^2\Delta + 3(R_{12} - R_{30}) \sin^2\Delta \cos\Delta - \right. \\
&\qquad \left. - (S_{12} - R_{21}) \sin\Delta \right] \\
&+ y_n^3 \left[-S_{03} \sin\Delta + (R_{03} - R_{21}) \sin^2\Delta \cos\Delta - R_{12} \sin\Delta \cos^2\Delta - R_{30} \sin^3\Delta \right] \\
&+ x_n^5 [\cdots] + \cdots
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
S_{30} &= -\frac{\Delta^2}{2!} + 4\frac{\Delta^4}{4!} - 25\frac{\Delta^6}{6!} + 208\frac{\Delta^8}{8!} - \cdots \\
S_{21} &= -3\frac{\Delta^3}{3!} + 24\frac{\Delta^5}{5!} - 207\frac{\Delta^7}{7!} + 1848\frac{\Delta^9}{9!} - \cdots \\
S_{12} &= -6\frac{\Delta^4}{4!} + 66\frac{\Delta^6}{6!} - 612\frac{\Delta^8}{8!} + \cdots \\
S_{03} &= -6\frac{\Delta^5}{5!} + 66\frac{\Delta^7}{7!} - 612\frac{\Delta^9}{9!} \\
R_{30} &= -\Delta + 4\frac{\Delta^3}{3!} - 25\frac{\Delta^5}{5!} + 208\frac{\Delta^7}{7!} \qquad (34) \\
R_{21} &= -3\frac{\Delta^2}{2!} + 24\frac{\Delta^4}{4!} - 207\frac{\Delta^6}{6!} + 1848\frac{\Delta^8}{8!} - \cdots \\
R_{12} &= -6\frac{\Delta^3}{3!} + 66\frac{\Delta^5}{5!} - 612\frac{\Delta^7}{7!} + \cdots \\
R_{03} &= -6\frac{\Delta^4}{4!} + 66\frac{\Delta^6}{6!} - 612\frac{\Delta^7}{7!} + \cdots
\end{aligned}
$$

L'examen de ces développements nous permet de constater que :

a) il n'y a pas de tetmes de degré pair

b) les séries S et R, développements en puissances croissantes de ne sont pas indépendantes.

Soient s_m et r_m les termes généraux de ces séries, nous avons la relation suivante

$$
\frac{s_m}{r_m} = \frac{\Delta}{m} \qquad (35)
$$

pour chaque paire de S et R ayant le même indice.

c) la partie linéaire des seconds membres, montre que les multiplicateurs sont égaux à

$$S_{1,2} = e^{\pm j(2\Delta)} = e^{\pm jT'} = e^{\pm jT\sqrt{d}} \tag{36}$$

c'est-à-dire : complexes conjugués de module unité. Nous nous trouvons ainsi devant un cas critique. Le point 0, origine du plan de phase est un point singulier du type centre.

5-2 - Cas d'exception

La récurrence formée par les équations (32) et (33) ont comme variables x_n et y_n réelles. Transformons cette récurrence par :

$$u = x + jy \quad ; \quad v = x - jy$$

(u et v étant complexes conjugués), la récurrence devient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n e^{j\varphi} + P_3(u_n, v_n) + \cdots \\ v_{n+1} &= v_n e^{-j\varphi} + Q_3(u_n, v_n) + \cdots \end{aligned} \tag{37}$$

avec $\varphi = T\sqrt{d}$

$$\begin{aligned} P_3 &= \alpha u_n^3 + \beta u_n^2 v_n + \gamma u_n v_n^2 + \delta v_n^3 \\ Q_3 &= \bar{\delta} u_n^3 + \bar{\gamma} u_n^2 v_n + \bar{\beta} u_n v_n^2 + \bar{\alpha} v_n^3 \end{aligned} \tag{38}$$

$(\alpha, \bar{\alpha})$: complexes conjugués

Nous constatons qu'avec les valeurs des coefficients des termes du 3ème degré dans (32) et (33), nous avons (voir calculs en Annexe 3 C)

1° - $\beta = 0$, quelle que soit la forme des 8 séries S_{30}, S_{21}, S_{12}, S_{03}, R_{30}, R_{21}, R_{12}, R_{03}

2° - $\delta \neq 0$ dans les mêmes conditions

Examinons le cas d'exception où nous avons $\varphi = \frac{2\pi}{4}$ c'est-à-dire que $\frac{2\pi}{4} = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{d}$ ou que

$$\omega = 4\sqrt{d} \tag{39}$$

Nous savons que, d'après [19]

1° - $G_1 = 0$, puisque $\beta = 0$ et qu'il n'y ait pas dans (37) des termes du second degré.

2° - La transformation de Cigala appliquée à (37) n'éliminera pas les termes en v_n^3 dans P_3 et en u_n^3 dans Q_3 de sorte que nous ayons

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n e^{i\varphi} + \delta v_n^3 \\ v_{n+1} &= v_n e^{-i\varphi} + \bar{\delta} u_n^3 \end{aligned} \tag{40}$$

3° - Les trajectoires discrètes sont de type hyperbolique, ayant comme directions asymptotiques θ_n données par la résolution de l'équation

$$\varphi + 4\theta_n + \tau_3 = a$$

Dans notre cas :

$$a = \frac{|\beta|}{|\delta|} \sin(\varphi + \tau_1) = 0$$

$$\tau_1 = \arg.\bar{\beta} = 0$$

$$\tau_3 = \arg.\bar{\delta}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{4}$$

d'où :

$$\theta_n = \frac{1}{4}(\varphi - \arg\bar{\delta}) \tag{41}$$

Les trajectoires discrètes de la figure 10 calculées numériquement à partir de la récurrence P-M_3 confirment cette prévision théorique.

Nous remercions Monsieur F. COUSIN qui, lors de son stage au L. A. A. S. octobre à décembre 1970, a vérifié les calculs des paragraphe 2, 3 et 4 de ce chapitre en y apportant des améliorations, et a mis au point le programme numérique de calcul des récurrences associées.

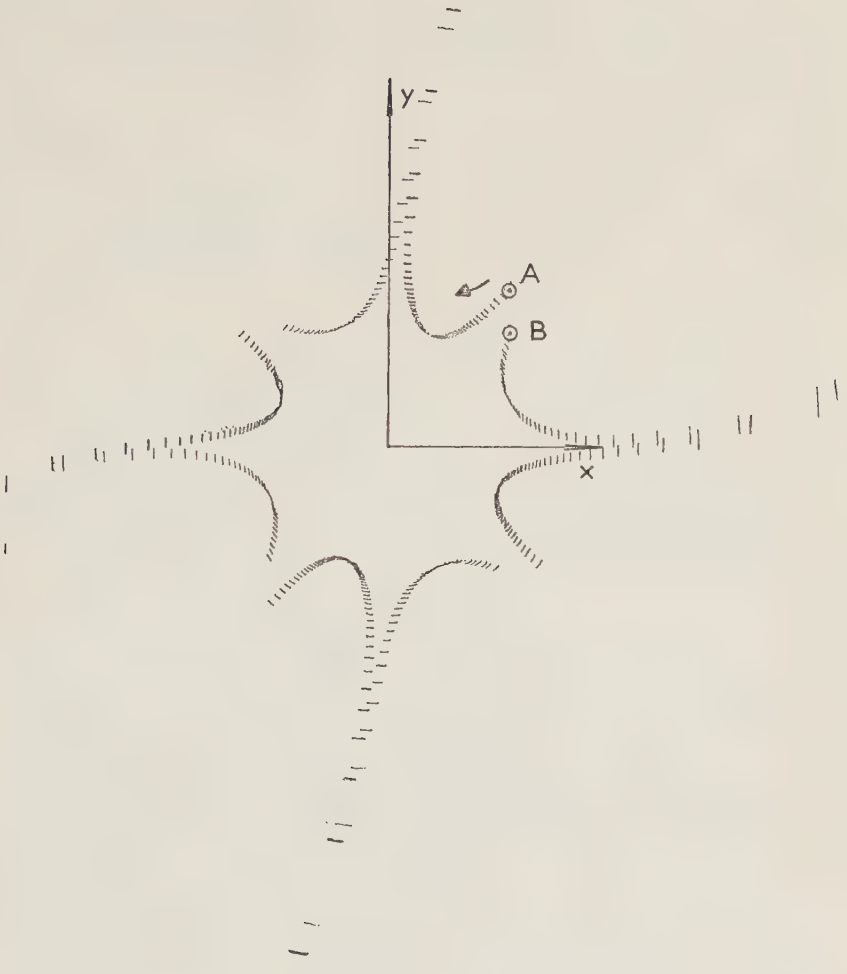


Figure 4-10 - Cas d'exception $\varphi = \frac{2\pi}{4}$. Trajectoires discrètes asymptotiques

Conditions initiales

A $\begin{cases} x = 0,208 \\ y = 0,2723 \end{cases}$ B $\begin{cases} x = 0,208 \\ y = 0,296 \end{cases}$

Annexe 4 A - DEFINITIONS ET PROPRIETES DE BASE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES (D'après [53] , chapitres 1 et 2)

Définitions

1 - $$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad (k^2 \leq 1) \qquad u = u(x)$$

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad x = \sin\varphi$$

$$x = sn\,u \qquad (\text{résolution implicite})$$

$$\sin\varphi = sn\,u$$
$$\cos\varphi = cn\,u$$
$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = dn\,u$$

2 - $$sn^2u + cn^2u = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$
$$dn^2u + k^2sn^2u = dn^2u + k^2\sin^2\varphi = 1$$
$$dn^2u - k^2cn^2u = k'^2 \qquad (k'^2 = 1-k^2 < 1)$$

$$-1 \leq sn\,u \leq 1$$

$$-1 \leq cn\,u \leq 1$$

$$0 < +k' \leq dn\,u \leq 1 \qquad (\text{dn ne s'annule jamais})$$

$$sn\,0 = 0 \;;\quad cn\,0 = 1 \;;\quad dn\,0 = 1$$

si $\varphi < \frac{\pi}{2}$ et petit

$$\left.\begin{aligned} sn\,u &= \sin\varphi \\ cn\,u &= \cos\varphi \\ dn\,u &= \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} \end{aligned}\right\} \text{ sont toujours positifs}$$

3 - sn, cn, dn sont aussi fonctions de k

sn (u, k) ; cn (u, k) ; dn (u, k)

4 - Quantité fondamentale K

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = 2K$$

5 -

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \qquad v = \int_0^{\pi+\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

$$v = 2K + u$$

$$\operatorname{sn} v = \operatorname{sn}(2K+u) = -\operatorname{sn} u$$
$$\operatorname{cn} v = \operatorname{cn}(2K+u) = -\operatorname{cn} u$$
$$\operatorname{dn} v = \operatorname{dn}(2K+u) = \operatorname{dn} u$$

6 -

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn} u &= \operatorname{sn}(u + 4mK) \\ \operatorname{cn} u &= \operatorname{cn}(u + 4mK) \end{aligned}\right\}$$ période réelle : 4 mK

$$\operatorname{dn} u = \operatorname{dn}(u + 2mK)$$: période réelle : 2 mK

7 -

$$\operatorname{sn} 2K = 0 \qquad \operatorname{sn} K = 1$$
$$\operatorname{cn} 2K = -1 \qquad \operatorname{cn} K = 0$$
$$\operatorname{dn} 2K = 1 \qquad \operatorname{dn} K = +k'$$

Dérivées, développements, variations

8 -

$$\frac{d\,sn\,u}{du} = cn\,u\,dn\,u$$

$$\frac{d\,cn\,u}{du} = -sn\,u\,dn\,u$$

$$\frac{d\,dn\,u}{du} = -k^2\,sn\,u\,cn\,u$$

$$\frac{d^2\,sn\,u}{du^2} = 2k^2\,sn^2\,u - (1+k^2)\,sn\,u$$

9 -

$$sn\,u = u - 2k\alpha\frac{u^3}{3!} + 4k^2(\alpha^2+3)\frac{u^5}{5!} + 8k^2(\alpha^3+33\alpha)\frac{u^7}{7!} + \cdots$$

$$cn\,u = 1 - \frac{u^2}{2!} + (1+4k^2)\frac{u^4}{4!} - (1+44k^2+16k^4)\frac{u^6}{6!} + \cdots$$

$$dn\,u = 1 - k^2\frac{u^2}{2!} + k^2(4+k^2)\frac{u^4}{4!} - k^2(16+44k^2+k^4)\frac{u^6}{6!} + \cdots$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)$$

convergence, pour u suffisamment petits

$$sn(-u) = -sn\,u \quad \text{fonction impaire}$$

$$cn(-u) = cn\,u, \quad dn(-u) = dn\,u \quad \text{fonctions paires}$$

10 - pour α très petit

$$sn\,u = u - 2k\alpha\frac{u^3}{3!} \qquad \alpha = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right)$$

$$sn\,u = \frac{\sin\left(u\sqrt{1+k^2}\right)}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$cn\,u = 1 - \frac{u^2}{2!} = \cos u$$

$$dn\,u = 1 - \frac{k^2u^2}{2!} = \cos ku$$

11 - $k = 0$

$sn(u,0) = \sin u$

$cn(u,0) = \cos u$

$dn(u,0) = 1$

$(K)_{k=0} = \frac{\pi}{2}$

$x = \sin u$

$k = 1$

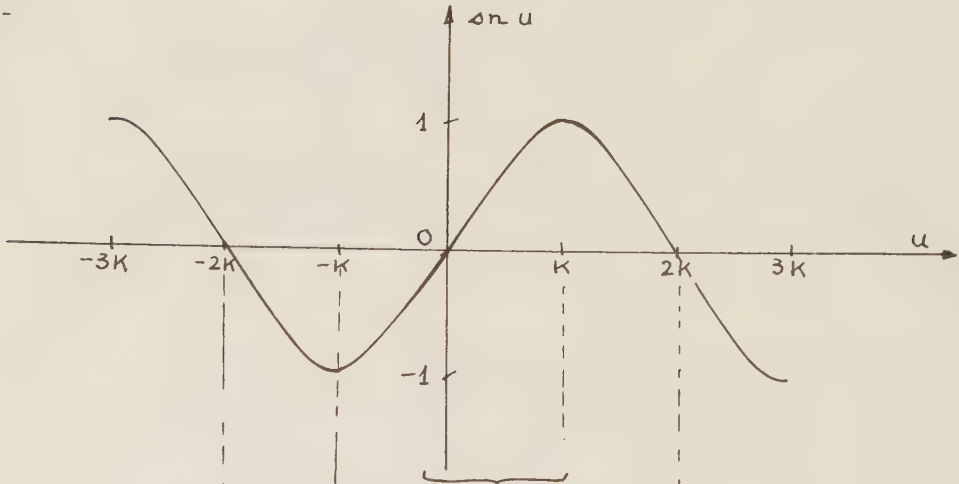
$sn(u,1) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$.

$cn(u,1) = dn(u,1) = \frac{2}{e^u + e^{-u}}$

$(K)_{k=1} = \infty$

$x = \frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1}$

12 -



u varie de 0 à K

φ " de 0 à $\frac{\pi}{2}$

sn u " de 0 à 1

$d\frac{sn\,u}{du}$ " de 1 à 0

de $u = -K$ à $u = +K$

$sn(-u) = sn(u)$

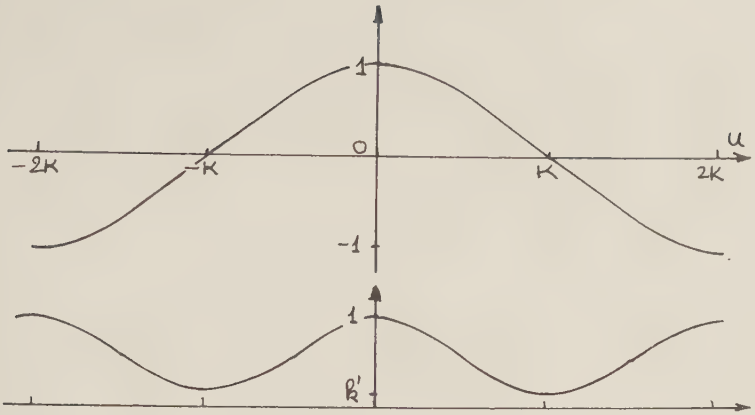
symétrie par rapport à l'origine.

de $u = -2K$ à $u = +2K$

$sn(K-h) = sn(K+h)$

symétrie par rapport à $u = K$ et $u = -K$

$sn(u+2K) = -sn(u)$ pour le reste



13 - Addition

$$sn(u+v) = \frac{sn u\, cn v\, dn v + sn v\, cn u\, dn u}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$cn(u+v) = \frac{cn u\, cn v - sn u\, sn v\, dn u\, dn v}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$dn(u+v) = \frac{dn u\, dn v - k^2 sn u\, sn v\, cn u\, cn v}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

14 - Duplication

$$sn\,2u = \frac{2\, sn u\, cn u\, dn u}{1 - k^2 sn^4 u}$$

$$cn\,2u = \frac{cn^2 u - sn^2 u\, dn^2 u}{1 - k^2 sn^4 u}$$

$$dn\,2u = \frac{dn^2 u - k^2 sn^2 u\, cn^2 u}{1 - k^2 sn^4 u}$$

15 -

$$sn(u+K) = \frac{cn\,u}{dn\,u}$$

$$cn(u+K) = -k' \frac{sn\,u}{dn\,u}$$

$$dn(u+K) = \frac{k'}{dn\,u}$$

16 - Sachant que :

$$sn\frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}} \; ; \quad cn\frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}} \; ; \quad dn\frac{K}{2} = \sqrt{k'}$$

les formules d'addition permettent de calculer

$$sn\left(u+\frac{K}{2}\right) \; , \quad cn\left(u+\frac{K}{2}\right) \; , \quad dn\left(u+\frac{K}{2}\right)$$

17 - On montre que (sn u, cn u) et (dn u) n'ont que les seules périodes réelles (4mK) et (2mK)

Annexe 4 B - CALCUL DES SOLUTIONS PARTIELLES QUAND $f(\omega t) = -1$ ET AUX DIFFERENTS CAS DE LA VALEUR DE C

$$C > \frac{d^2}{2d'} > 0 \quad ; \quad C = \frac{d^2}{2d'} \quad ; \quad 0 < C < \frac{d^2}{2d'} \quad ; \quad C = 0 \quad ; \quad C < 0$$

4-B-1 - Cas où $C > d^2/2d'$ (donc $C > 0$)

Le déterminant Δ est strictement négatif. L'équation (11) s'écrit :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d'}{2}(x^2 - r_1)(x^2 - r_2)$$

où r_1 et r_2 sont des nombres complexes

$$r_1 = \frac{d + i\sqrt{2Cd' - d^2}}{d'} \quad ; \quad r_2 = \frac{d - i\sqrt{2Cd' - d^2}}{d'}$$

La partie réelle et la partie imaginaire de r_1 sont positives. Soit

$$r_1 = (a + ib)^2 \quad , \quad a \geq 0 \quad , \quad b \geq 0$$

Les deux racines de r_1 sont $a+ib$ et $-a-ib$ celles de r_2 sont $a-ib$ et $-a+ib$ Nous avons donc :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d'}{2}(x + a + ib)(x + a - ib)(x - a + ib)(x - a - ib)$$

En regroupant les racines conjuguées :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d'}{2}(x^2 + 2ax + a^2 - b^2)(x^2 - 2ax + a^2 - b^2)$$

Première transformation

Pour faire disparaître les termes en x, posons :

$$x = \frac{\lambda + \mu\theta}{1 + \theta}$$

où λ et μ sont des coefficients à déterminer.

Nous avons : $\frac{dx}{d\theta} = \frac{\mu - \lambda}{(1 + \theta)^2}$

d'où

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{(\mu - \lambda)^2}{(1 + \theta)^4} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{d'}{2(1+\theta)^4}\left[(\lambda + \mu\theta)^2 + 2a(\lambda + \mu\theta)(1 + \theta) + (a^2 + b^2)(1 + \theta)^2\right] \times$$

$$\times \left[(\lambda + \mu\theta)^2 - 2a(\lambda + \mu\theta)(1 + \theta) + (a^2 + b^2)(1 + \theta)^2\right]$$

ou :

$$(\mu - \lambda)^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{d'}{2} \cdot \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$$

avec : $\Gamma_1 = (\mu^2 + 2a\mu + a^2 + b^2)\theta^2 + [2\lambda\mu + 2a(\lambda+\mu) + 2(a^2+b^2)]\theta +$
$+ \lambda^2 + 2a\lambda + a^2 + b^2$

$\Gamma_2 = (\mu^2 - 2a\mu + a^2 + b^2)\theta^2 + [2\lambda\mu - 2a(\lambda+\mu) + 2(a^2+b^2)]\theta +$
$+ \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2$

Les termes en θ dans Γ_1 et Γ_2 disparaissent si $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda\mu = -a^2 - b^2$.
Prenons donc :

$$\lambda = -\sqrt{a^2+b^2} \quad ; \quad \mu = \sqrt{a^2+b^2} > 0$$

Il s'en suit que :

$$\mu^2 + 2a\mu + a^2 + b^2 = 2\sqrt{a^2+b^2}\,(a + \sqrt{a^2+b^2})$$
$$\lambda^2 + 2a\lambda + a^2 + b^2 = 2\sqrt{a^2+b^2}\,(-a + \sqrt{a^2+b^2})$$

et :

$$\Gamma_1 = 2\sqrt{a^2+b^2}\left[(a+\sqrt{a^2+b^2}\,\theta^2 - a + \sqrt{a^2+b^2}\right]$$
$$\Gamma_2 = 2\sqrt{a^2+b^2}\left[-a+\sqrt{a^2+b^2}\,\theta^2 + a + \sqrt{a^2+b^2}\right]$$

Posons :

$$n = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{-a+\sqrt{a^2+b^2}}} \geqslant 1$$
$$j = \frac{1}{h} \; , \quad 0 < j < 1 \quad ; \quad 0 < j < h$$

Il vient :

$$\Gamma_1 = 2\sqrt{a^2+b^2}\,(a+\sqrt{a^2+b^2})\,(\theta^2+j^2)$$
$$\Gamma_2 = 2\sqrt{a^2+b^2}\,(-a+\sqrt{a^2+b^2})\,(\theta^2+h^2)$$
$$\Gamma_1.\Gamma_2 = 4b^2(a^2+b^2)(\theta^2+j^2)(\theta^2+h^2)$$
$$4(a^2+b^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{d^2}{2}\,4b^2(a^2+b^2)(\theta^2+j^2)(\theta^2+h^2)$$
$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{d^2}{2}\,b^2(\theta^2+j^2)(\theta^2+h^2)$$
$$\varepsilon b\sqrt{\frac{d^2}{2}}\,dt = \frac{d\theta}{\sqrt{(\theta^2+j^2)(\theta^2+h^2)}} \quad ; \quad \varepsilon = \pm 1$$

Deuxième transformation

Posons $\theta^2 = y^2 - h^2$ d'où $d\theta = \frac{\pm y\,dy}{\sqrt{y^2 - h^2}}$

Comme nous cherchons les racines réelles, nous devons avoir $y^2 \geq h^2$
L'équation en dt devient :

$$\varepsilon b \sqrt{\frac{d'}{2}}\, dt = \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - h^2)(y^2 - h^2 + j^2)}}$$

Troisième transformation

Posons $y = z\sqrt{h^2 - j^2}$

On doit avoir $z^2 \geq \frac{h^2}{h^2 - j^2}$

Il s'ensuit

$$\varepsilon b \sqrt{\frac{d'}{2}}\, dt = \frac{\sqrt{h^2 - j^2}\; dz}{\sqrt{h^2(h^2 - j^2).\left(\frac{h^2 - j^2}{h^2} z^2 - 1\right)(z^2 - 1)}}$$

Posons : $k = \sqrt{1 - \frac{j^2}{h^2}} = \sqrt{1 - j^4} < 1$

(on doit avoir $z^2 \geq \frac{1}{k^2}$)

$$\sigma = h b \sqrt{\frac{d'}{2}}$$

Nous avons :

$$\varepsilon \sigma dt = \frac{dz}{\sqrt{(k^2 z^2 - 1)(z^2 - 1)}} \qquad \text{(condition } z^2 \geq \frac{1}{k^2}\text{)}$$

Nous pouvons exprimer z comme un sinus elliptique de $\varepsilon \sigma dt + c^{te}$
Toutefois, dans la définition de x = sn u, provenant de

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$$

l'intégration va être calculée dans une première zone $0 \leq x \leq 1/k$
zone qui, dans notre cas, correspond aux valeurs imaginaires de z. Pour rester dans le domaine réel, nous allons utiliser le procédé suivant. Nous

prenons l'intégrale de chaque membre entre $1/k$ et z

$$\varepsilon(\sigma t + C_1) = \int_{\frac{1}{k}}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(k^2z^2-1)(z^2-1)}}$$

Posons :

$$A = \int_{0}^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(k^2z^2-1)(z^2-1)}}$$

Nous avons : $sn\,A = \frac{1}{k}$ et $dn\,A = \sqrt{1-k^2 sn^2 A} = 0$

et :

$$\varepsilon(\sigma t + C_1) + A = \int_{0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(k^2z^2-1)(z^2-1)}}$$

d'où :

$$z = sn(\varepsilon(\sigma t + C_1) + A)$$

Développons cette expression la formule d'addition [53] en posant $u = \varepsilon(\sigma t + C_1)$:

$$z = sn(u+A) = \frac{sn\,u\,cn\,A\,dn\,A + sn\,A\,cn\,u\,dn\,u}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 A}$$

$$z = \frac{1}{k} \cdot \frac{cn\,u \cdot dn\,u}{1 - sn^2 u} = \frac{1}{k} \frac{cn\,u \cdot dn\,u}{cn^2 u} = \frac{1}{k} \cdot \frac{dn\,u}{cn\,u}$$

$$z = \varepsilon \frac{1}{k} \cdot \frac{dn(\sigma t + C_1)}{cn(\sigma t + C_1)}$$

Revenons aux variables y, θ puis x :

$$y = \sqrt{h^2 - j^2}\, z = \varepsilon \frac{\sqrt{h^2-j^2}}{k} \cdot \frac{dn(\sigma t + C_1)}{cn(\sigma t + C_1)} = \varepsilon h \frac{dn(\sigma t + C_1)}{cn(\sigma t + C_1)}$$

$$\theta^2 = y^2 - h^2 = h^2 \left[\frac{dn^2(\sigma t + C_1)}{cn^2(\sigma t + C_1)} - 1 \right]$$

Or : $dn^2u = 1 - k^2 sn^2u$ et $cn^2u = (1 - sn^2u)$, donc
$dn^2u - cn^2u = (1 - k^2) sn^2u$, et

$$\theta^2 = h^2(1-k^2)\frac{sn^2(\sigma t + C_1)}{cn^2(\sigma t + C_1)} = j^2 \frac{sn^2(\sigma t + C_1)}{cn^2(\sigma t + C_1)}$$

$$\theta = \varepsilon j \frac{sn(\sigma t + C_1)}{cn(\sigma t + C_1)} \quad , \quad \varepsilon = \pm 1$$

$$x = \mu \frac{\theta - 1}{\theta + 1} = \sqrt{a^2 + b^2}\ \frac{j\,sn(\sigma t + C_1) - \varepsilon\, cn(\sigma t + C_1)}{j\,sn(\sigma t + C_1) + \varepsilon\, cn(\sigma t + C_1)}$$

Symétrie de la solution

Si l'on ajoute la période K à C_1 (K : quantité fondamentale, appendice 4 A point 4) θ est changé en $1/\theta$ et x est changé en - x

Calcul des coefficients

Calculons $\sqrt{a^2+b^2}$, j , σ et k, en fonction de d, d' et C.

Les coefficients positifs a et b sont définis par :

$$(a + bi)^2 = A + Bi$$

avec

$$A = \frac{d}{d'} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{\sqrt{2Cd' - d^2}}{d'}$$

Nous avons donc :

$$2ab = B$$
$$a^2 - b^2 = A$$
$$a^2 + b^2 = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Des deux dernières équations, nous tirons

$$a = \frac{A + (A^2 + B^2)^{1/2}}{2} \qquad b = \frac{-A + (A^2 + B^2)^{1/2}}{2}$$

En remplaçant A et B par leur valeur

$$a^2 = \frac{d + \sqrt{2Cd'}}{2d'} \qquad b^2 = \frac{-d + \sqrt{2Cd'}}{2d'}$$

Les autres expressions sont :

$$a^2 + b^2 = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\frac{2C}{d'}}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \left(\frac{2C}{d'}\right)^{1/4}$$

$$j^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{a + \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

avec

$$\alpha^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}\,\frac{d + \sqrt{2Cd'}}{\sqrt{2Cd'}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{d}{\sqrt{2Cd'}}\right)$$

$$\sigma = h\,b\sqrt{\frac{d'}{2}} = \frac{b}{j}\sqrt{\frac{d'}{2}}$$

Or :

$$h^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{-a + \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2}{b^2}$$

d'où

$$h\,b = a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

où :

$$hb = \sqrt{a^2 + b^2}\left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \left(\frac{2C}{d'}\right)^{1/4}(1 + \alpha)$$

$$= \left(\frac{2C}{d'}\right)^{1/4}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{d}{\sqrt{2Cd'}}}\right)$$

d'où;

$$\sigma = \left(\frac{Cd'}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{d}{\sqrt{2Cd'}}\right)}\right)$$

En résumé, nous avons :

$$x = \left(\frac{2C}{d'}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{j\,sn(\sigma t + C_1) - \varepsilon\, cn(\sigma t + C_1)}{j\,sn(\sigma t + C_1) + \varepsilon\, cn(\sigma t + C_1)}$$

$$k = \sqrt{1 - j^4} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$$

(4B1)
$$\sigma = \left(\frac{C d'}{2}\right)^{1/4} (1+\alpha)$$

$$j = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{d}{\sqrt{2Cd'}}\right)}$$

4-B-2 - Cas où $C = d^2/2d'$

Le discriminant Δ est alors nul. L'équation (11) prend la forme :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d'}{2}(x^2 - a^2)^2 \qquad \text{avec} \quad a^2 = \frac{a}{d'} \geq 0$$

d'où
$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon \sqrt{\frac{d'}{2}}\,(x^2 - a^2)$$

$$\varepsilon \sqrt{\frac{d'}{2}}\, dt = \frac{dx}{x^2 - a^2}$$

Soit $d' \neq 0$, $d > 0$

$$\varepsilon\left(\sqrt{\frac{d'}{2}}\, t + C_1\right) = -\frac{1}{a}\, Arg.\, th\, \frac{x}{a} \qquad si\ |x| < a$$

$$\varepsilon\left(\sqrt{\frac{d'}{2}}\, t + C_1\right) = -\frac{1}{a}\, Arg.\, coth\, \frac{x}{a} \qquad si\ |x| > a$$

d'où

$$x = \pm\sqrt{\frac{d}{d'}}\, th(\sigma t + C_1) \qquad si\ |x| < a$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{d}{d'}}\, coth(\sigma t + C_1) \qquad si\ |x| > a$$

(4B2)
$$a^2 = \frac{d}{d'} > 0 \qquad et \qquad \sigma = \sqrt{\frac{d'}{2}}$$

4-B-3 - Cas où $0 < C < d^2/2d'$

Alors $d \neq 0$ et le discriminant $\Delta > 0$. En posant

$$q_1 = \frac{d + \sqrt{d^2 - 2Cd'}}{d'} > 0, \qquad q_2 = \frac{d - \sqrt{d^2 - 2Cd'}}{d'} > 0$$

L'équation (11) s'écrit :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d'}{2} \cdot (x^2 - q_1)(x^2 - q_2)$$

d'où

$$\varepsilon\sqrt{\frac{d'}{2}}\,dt = \frac{dx}{\sqrt{(x^2-q_1)(x^2-q_2)}}$$

Faisons le changement de variable : $x = \sqrt{q_2}\,z$

$$\varepsilon\sqrt{\frac{d'}{2}}\,dt = \frac{\sqrt{q_2}\,dz}{\sqrt{q_1 q_2\left(\frac{q_2}{q_1}z^2-1\right)(z^2-1)}}$$

Posons :

$$k = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} < 1 \quad , \qquad \sigma = +\sqrt{\frac{d'}{2}q_1}$$

Alors : $\varepsilon\sigma\,dt = \dfrac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ d'où : $z = \pm\,sn(\sigma t + C_1)$

et

(AB3a) $$x = \pm\sqrt{q_2}\,sn(\sigma t + C_1)$$

Il existe une autre solution, correspondant à $z^2 > \frac{1}{k^2}$. Reprenons l'équation écrite sous la forme :

$$\varepsilon\sigma\,dt = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

et cherchons les solutions réelles z telles que $z^2 > \frac{1}{k^2}$. Intégrons l'équation précédente entre $1/k$ et z $(z>0)$, puis ajoutons à chaque membre la quantité complexe

$$A = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

On a $sn\,A = 1/k$, d'où $dn\,A = 0$

Il vient :

$$\varepsilon(\sigma t + C_1) + A = \int_0^{z} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

d'où $z = sn(u + A)$ avec $u = \varepsilon(\sigma t + C_1)$

Développons la formule d'addition :

$$z = sn(u+A) = \frac{sn\,u\,cn\,A\,dn\,A + sn\,A\,cn\,u\,dn\,u}{1 - k^2\,sn^2A\,sn^2u}$$

$$= \frac{1}{k}\cdot\frac{cnu\,dnu}{cn^2u} = \frac{1}{k}\cdot\frac{dnu}{cnu}$$

Revenons à x

(4 B 3 b) $$x = \sqrt{q_2}\,z = \frac{\sqrt{q_2}}{k}\frac{dnu}{cnu} = \sqrt{q_1}\frac{dnu}{cnu}$$

Résumons l'ensemble des deux solutions

(4 B 3)
$$x = \pm\sqrt{q_2}\,sn(\sigma t + C_1) \quad \text{si} \quad x^2 < q_1$$
$$x = \pm\sqrt{q_1}\,\frac{dn(\sigma t + C_1)}{cn(\sigma t + C_1)} \quad \text{si} \quad x^2 > q_1$$

avec $q_1 = \dfrac{d + \sqrt{d^2 - 2Cd'}}{d'} > 0$ et $\sigma = \sqrt{\dfrac{d'}{2}q_1}$

En effet, la condition $z^2 < \frac{1}{k^2}$ devient avec x :

$$\frac{x^2}{q_2} < \frac{q_1}{q_2} \quad \text{ou} \quad x^2 < q_1$$

4-B-4 - <u>cas où C = 0</u>

L'équation (11) s'écrit :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d'}{2}x^4 - d.x^2$$

c'est-à-dire : $$\varepsilon\sqrt{\frac{d'}{2}}\,dt = \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad a = \sqrt{\frac{2d}{d'}}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

Soit $d' \neq 0$ $(d > 0)$

Alors $a > 0$

Posons $x = \varepsilon' a\,ch\varphi$ avec $\varepsilon' = \pm 1$ et $\varphi \geq 0$

$$\varepsilon\sqrt{\frac{d'}{2}}\,dt = \frac{d\varphi}{a\,ch\varphi} \; ; \quad \varepsilon\sqrt{d}\,dt = \frac{d\varphi}{ch\varphi}$$

$$\varepsilon(\sqrt{d}\,t + C_1) = \int\frac{d\varphi}{ch\varphi} = 2\,Arc\,tg\left(th\,\frac{\varphi}{2}\right)$$

Revenons à la variable x. Comme :

$$ch\varphi = \frac{1+th^2\frac{\varphi}{2}}{1-th^2\frac{\varphi}{2}}\ ,\ \text{on a}\ th^2\frac{\varphi}{2} = \frac{ch\varphi - 1}{ch\varphi + 1}\ \text{et}\ th\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{ch\varphi - 1}{ch\varphi + 1}}$$

Comme $ch\varphi = \varepsilon' \frac{x}{a}$ on a

$$th\ \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{x - \varepsilon' a}{x + \varepsilon' a}}$$

et

$$\varepsilon(\sqrt{d}\,t + C_1) = 2\ Arc\,tg\left(\sqrt{\frac{x-\varepsilon' a}{x+\varepsilon' a}}\right)$$

d'où :

$$\frac{x - \varepsilon' a}{x + \varepsilon' a} = tg^2\frac{\sqrt{d}\,t + C_1}{2}$$

$$\frac{\varepsilon' x}{a} = \frac{1 + tg^2\frac{\sqrt{d}\,t + C_1}{2}}{1 - tg^2\frac{\sqrt{d}\,t + C_1}{2}} = \frac{1}{\cos(\sqrt{d}\,t + C_1)}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2d}{d'}}\ \frac{1}{\cos(\sqrt{d}\,t + C_1)}$$

Résumons les deux solutions

(4 B 4)

$$x = \pm\ \frac{1}{\sigma t + C_1}\ ,\ \text{si}\ d = 0\ ;\ \sigma = \sqrt{\frac{d'}{2}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2d}{d'}}\ \frac{1}{\cos(\sqrt{d}\,t + C_1)}\ ,\ \text{si}\ d > 0$$

4-B-5 - Cas où $C < 0$

Le déterminant Δ est strictement positif, mais les racines du trinôme $(d'/2)x^4 - d.x^2 + C$ sont de signes contraires. Posons :

$$q_1 = \frac{\sqrt{d^2 - 2Cd'} + d}{d'} > 0\ ;\quad q_2 = \frac{\sqrt{d^2 - 2C\,d'} - d}{d'} > 0$$

on a : $q_1 > q_2$ par définition

L'équation (11) s'écrit : $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d'}{2}(x^2 - q_1)(x^2 + q_2)$

d'où :

$$\varepsilon \sqrt{\frac{d'}{2}}\, dt = \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - q_1)(x^2 + q_2)}}$$

avec la condition de réalité : $x^2 \geqslant q_1$

Premier changement de variable

Posons $x^2 = y^2 - q_2$, d'où $dx = \dfrac{y\,dy}{\sqrt{y^2 - q_2}}$

La condition de réalité devient $y^2 \geqslant q_1 + q_2$

L'équation différentielle devient :

$$\varepsilon \sqrt{\frac{d'}{2}}\, dt = \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - q_2)(y^2 - q_2 - q_1)}}$$

Deuxième changement de variable

Posons $y = \sqrt{q_2}\, z$. La condition de réalité devient $z^2 \geqslant \dfrac{q_2}{q_1 + q_2}$

L'équation différentielle devient :

$$\varepsilon \sqrt{\frac{d'}{2}}\, dt = \frac{\sqrt{q_2}\, dz}{\sqrt{q_2(q_1 + q_2)(z^2 - 1)\left(\frac{q_2}{q_1 + q_2} z^2 - 1\right)}}$$

Posons $k = \sqrt{\dfrac{q_2}{q_2 + q_1}} < 1$ et $\sigma = \sqrt{\dfrac{d'}{2}(q_1 + q_2)}$

La condition de réalité devient $z^2 \geqslant \dfrac{1}{k^2}$ et :

$$\varepsilon \sigma\, dt = \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)(k^2 z^2 - 1)}}$$

Suivons la même procédure utilisée en 4B1 et 4B3

$$\varepsilon(\sigma t + C_1) = \int_{\frac{1}{k}}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)(k^2 z^2 - 1)}}$$

C_1 constante réelle

$$\varepsilon(\sigma t + C_1) + A = \int_{0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)(k^2 z^2 - 1)}} \quad \text{avec} \quad A = \int_{0}^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)(k^2 z^2 - 1)}}$$

A est un nombre complexe vérifiant $sn A = \frac{1}{k}$ et $dn A = 0$.

$$z = sn\left[\varepsilon(\sigma t + C_1) + A\right] = sn(u + A)$$

$$z = \frac{sn\,u\,cn A\,dn A + sn A\,cn u\,dn u}{1 - k^2\,sn^2 u\,sn^2 A} = \frac{1}{k}\,\frac{dn\,u}{cn\,u}$$

$$z = \frac{1}{k}\,\frac{dn(\sigma t + C_1)}{cn(\sigma t + C_1)}$$

Reveons à la variable y puis à x

$$y = \frac{\sqrt{q_2}}{k}\,\frac{dn(\sigma t + C_1)}{cn(\sigma t + C_1)}$$

$$x^2 = y^2 - q_2 = q_2\left(\frac{dn^2(\sigma t + C_1)}{k^2 cn^2(\sigma t + C_1)} - 1\right) = q_2\,\frac{k'^2}{k^2 cn^2(\sigma t + C_1)}$$

où $$k'^2 = 1 - k^2 = 1 - \frac{q_2}{q_1 + q_2} = \frac{q_1}{q_1 + q_2}$$

Or :

$$q_2\,\frac{k'^2}{k^2} = q_2\,\frac{q_1}{q_2} = q_1$$

D'où la solution :

$$x = \pm\,\frac{\sqrt{q_1}}{cn(\sigma t + C_1)}$$

(4-B-5)

$$q_1 = \frac{\sqrt{d^2 - 2Cd'} + d}{d'} > 0$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{d'}{2}(q_1 + q_2)} = (d^2 - 2Cd')^{\frac{1}{4}}$$

Annexe 3 C - DEVELOPPEMENT DE x_{n+1} et y_{n+1}

Soit l'équation d'origine

(1) $$\ddot{X} + d.X + d'.f(\omega' t').X^3 = 0 \quad ; \quad \omega' = \frac{2\pi}{T'}$$

Posons :

$$X = x\sqrt{\frac{d}{d'}} \qquad x = X\sqrt{\frac{d'}{d}}$$

$$Y = \frac{dX}{dt'} = y\sqrt{\frac{d^2}{d'}} \qquad y = Y\sqrt{\frac{d'}{d^2}}$$

$$t' = t\,\frac{1}{\sqrt{d}} \qquad t = t'\sqrt{d}$$

On a :

$$\ddot{X} = \frac{d^2X}{dt'^2} = \frac{dY}{dt'} = \frac{dy\ \frac{d}{\sqrt{d'}}}{dt\ \frac{1}{\sqrt{d}}} = \frac{dy}{dt}\,\frac{d\sqrt{d}}{\sqrt{d'}}$$

L'équation (1) devient

$$\frac{dy}{dt}\,\frac{d\sqrt{d}}{\sqrt{d'}} + x.\frac{d\sqrt{d}}{\sqrt{d'}} + x^3.\frac{d\sqrt{d}}{\sqrt{d'}}.f\left(\frac{2\pi}{T}\,\frac{t}{\sqrt{d}}\right) = 0$$

où :

$$\ddot{x} + x + x^3.f\left(\frac{2\pi}{T}.t\right) = 0$$

avec :

$$f\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \pm 1$$

Entre nT et nT + T/2, on prend :

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0$$

Entre nT + T/2 et (n+1) T, on prend

$$\ddot{x} + x - x^3 = 0$$

4-C-1 - Développement en série de Taylor

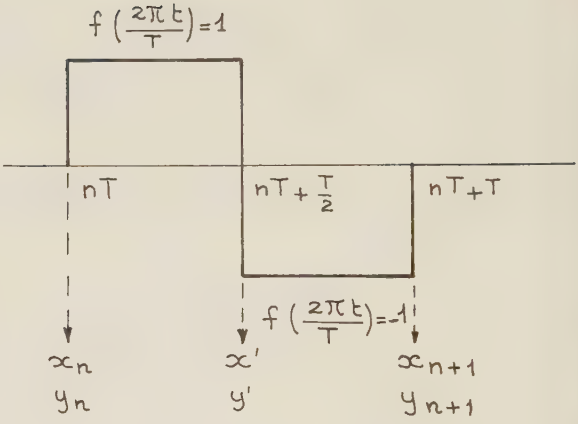
Principe

On désire obtenir les relations explicites

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n) \quad ; \quad y_{n+1} = g(x_n, y_n)$$

On désigne par

$$x_n = x(nT)$$
$$y_n = y(nT)$$
$$x' = x(nT+\tfrac{T}{2})$$
$$y' = y(nT+\tfrac{T}{2})$$
$$x_{n+1} = x(nT+T)$$
$$y_{n+1} = y(nT+T)$$



Développement :

$$x' = x(nT+\Delta) = x_n + \Delta\frac{dx_n}{dt} + \frac{\Delta^2}{2!}\frac{d^2x_n}{dt^2} + \frac{\Delta^3}{3!}\frac{d^3x_n}{dt^3} + \dots$$

$$y' = y(nT+\Delta) = y_n + \Delta\frac{dy_n}{dt} + \frac{\Delta^2}{2!}\frac{d^2y_n}{dt^2} + \frac{\Delta^3}{3!}\frac{d^3y_n}{dt^3} + \dots$$

$$x_{n+1} = x(nT+2\Delta) = x' + \Delta\frac{dx'}{dt} + \frac{\Delta^2}{2!}\frac{d^2x'}{dt^2} + \dots$$

$$y_{n+1} = y(nT+2\Delta) = y' + \Delta\frac{dy'}{dt} + \frac{\Delta^2}{2!}\frac{d^2y'}{dt^2} + \dots$$

4-C-2 - Calcul des dérivées

$\frac{d^2x_n}{dt^2}, \frac{d^3x_n}{dt^3} \dots \frac{d^2y_n}{dt^2}, \frac{d^3y_n}{dt^3} \dots$ évaluées avec $\ddot{x} + x + x^3 = 0$

$\frac{d^2x'}{dt^2}, \frac{d^3x'}{dt^3} \dots \frac{d^2y'}{dt^2}\ \frac{d^3y'}{dt^3} \dots$ évaluées avec $\ddot{x} + x - x^3 = 0$

en dérivant successivement

$$\frac{d^n\ddot{x}}{dt^n} = \frac{d^n}{dt^n}(-x - x^3)$$

ou

$$\frac{d^n\ddot{x}}{dt^n} = \frac{d^n}{dt^n}(-x + x^3)$$

a) Dérivées successives de $(-x - x^3)$

$$x^{(2)} = -x - x^3$$

$$x^{(3)} = -x^{(1)} - 3x^2 x^{(1)}$$

$$x^{(4)} = -x^{(2)} - 6x x^{(1)2} - 3x^2 x^{(2)}$$

$$x^{(5)} = -x^{(3)} - 6x^{(1)3} - 18x x^{(1)} x^{(2)} - 3x^2 x^{(3)}$$

$$x^{(6)} = -x^{(4)} - 36 x^{(1)2} x^{(2)} - 18x x^{(2)2} - 24 x x^{(1)} x^{(3)} - 3x^2 x^{(4)}$$

$$x^{(7)} = -x^{(5)} - 90 x^{(1)} x^{(2)2} - 60 x^{(1)2} x^{(3)} - 60 x x^{(2)} x^{(3)} - 30 x x^{(1)} x^{(4)} - 3x^2 x^{(5)}$$

$$x^{(8)} = -x^{(6)} - 90 x^{(2)3} - 360 x^{(1)} x^{(2)} x^{(3)} - 90 x^{(1)2} x^{(4)} - 60 x x^{(3)2} - 90 x x^{(2)} x^{(4)} - 36 x x^{(1)} x^{(5)} - 3x^2 x^{(6)}$$

$$x^{(9)} = -x^{(7)} - 630 x^{(2)2} x^{(3)} - 420 x^{(1)} x^{(3)2} - 630 x^{(1)} x^{(2)} x^{(4)} - 126 x^{(1)2} x^{(5)} - 210 x x^{(3)} x^{(4)} - 126 x x^{(2)} x^{(5)} - 42 x x^{(1)} x^{(6)} - 3x^2 x^{(7)}$$

Forme générale :

$$-x^{(k)} = -x^{(k-2)} - P_k(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k-3)}) - 3x^2 x^{(k-2)}$$

en fonction de x et y, ces dérivées s'écrivent :

$$x^{(0)} = x$$

$$x^{(1)} = y$$

$$x^{(2)} = -x - x^3$$

$$x^{(3)} = -y - 3yx^2$$

$$x^{(4)} = x + 4x^3 - 6xy^2 + 3x^5$$

$$x^{(5)} = y + 24x^2 y - 6y^3 + 27x^4 y$$

2 termes généraux (a partir de $x^{(2)}$)

$$x^{(2k)} = (-1)^{2k+1} x + P_{2k}(x,y)$$

$$x^{(2k+1)} = (-1)^{2k} y + P_{2k+1}(x,y)$$

$$x^{(6)} = -x - 25x^3 + 66xy^2 - 51x^5 + 126x^3y^2 - 27x^7$$

$$x^{(7)} = -y - 207x^2y + 66y^3 - 639x^4y + 378x^2y^3 - 441x^6y$$

$$x^{(8)} = +x + 208x^3 - 612xy^2 + 846x^5 - 3888x^3y^2 + 756xy^4 + 1080x^7 - 3780x^5y^2 + 441x^9$$

$$x^{(9)} = y - 612y^3 + 1848x^2y - 14688x^2y^3 + 756y^5 + 13230x^4y - 21924x^4y^3 + 22896x^6y + 11529x^8y$$

⋮

b) Dérivées successives de $(-x + x^3)$

Forme générale (à partir de $x^{(2)}$) :

$$x^{(k)} = -x^{(k-2)} + P_k(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k-3)}) + 3x^2x^{(k-2)}$$

En fonction de x et y, 2 termes généraux :

$$x^{(2k)} = (-1)^{2k+1}x - P_{2k}(x,y)$$

$$x^{(2k+1)} = (-1)^{2k}y - P_{2k+1}(x,y)$$

4-C-3 - Calcul de x' et y'

$\underline{x' = x'(x_n, y_n)}$

$$x' = x_n\left(1 - \frac{\Delta^2}{2!} + \frac{\Delta^4}{4!} - \frac{\Delta^6}{6!} + \cdots\right)$$
$$+ y_n\left(\Delta - \frac{\Delta^3}{3!} + \frac{\Delta^5}{5!} - \frac{\Delta^7}{7!} + \frac{\Delta^9}{9!} - \cdots\right)$$
$$+ x_n^3\left(-\frac{\Delta^2}{2!} + 4\frac{\Delta^4}{4!} - 25\frac{\Delta^6}{6!} + 208\frac{\Delta^8}{8!} - \cdots\right)$$
$$+ x_n^2 y_n\left(-3\frac{\Delta^3}{3!} + 24\frac{\Delta^5}{5!} - 207\frac{\Delta^7}{7!} + 1848\frac{\Delta^9}{9!} - \cdots\right)$$
$$+ x_n y_n^2\left(-6\frac{\Delta^4}{4!} + 66\frac{\Delta^6}{6!} - 612\frac{\Delta^8}{8!} + \cdots\right)$$
$$+ y_n^3\left(-6\frac{\Delta^5}{5!} + 66\frac{\Delta^7}{7!} - 612\frac{\Delta^9}{9!} + \cdots\right)$$

$$x' = x_n \cos\Delta + y_n \sin\Delta + S_{30}x_n^3 + S_{21}x_n^2 y_n + S_{12}x_n y_n^2 + S_{03}y_n^3$$

$\underline{y' = y'(x_n, y_n)}$

$$y' = -x_n\left(\Delta - \frac{\Delta^3}{3!} + \frac{\Delta^5}{6!} - \cdots\right)$$
$$+ y_n\left(1 - \frac{\Delta^2}{2!} + \frac{\Delta^4}{4!} - \frac{\Delta^6}{6!} + \cdots\right)$$
$$+ x_n^3\left(-\Delta + 4\frac{\Delta^3}{3!} - 25\frac{\Delta^5}{5!} + 208\frac{\Delta^7}{7!} - \cdots\right)$$
$$+ x_n^2 y_n\left(-3\frac{\Delta^2}{2!} + 24\frac{\Delta^4}{4!} - 207\frac{\Delta^6}{6!} + 1848\frac{\Delta^8}{8!} - \cdots\right)$$
$$+ x_n y_n^2\left(-6\frac{\Delta^3}{3!} + 66\frac{\Delta^5}{5!} - 612\frac{\Delta^7}{7!} + \cdots\right)$$
$$+ y_n^3\left(-6\frac{\Delta^4}{4!} + 66\frac{\Delta^6}{6!} - 612\frac{\Delta^8}{8!} + \cdots\right)$$

$$y' = -x_n \sin\Delta + y_n \cos\Delta + R_{30}x_n^3 + R_{21}x_n^2 y_n + R_{12}x_n y_n^2 + R_{03}y_n^3$$

Comparaison des coefficients S et R

S (dans x')	R (dans y')
$S_{30} = \sum_{k=1}^{\infty} s_{1k} \frac{\Delta^{2k}}{(2k)!}$	$R_{30} = \sum_{k=1}^{\infty} s_{1k} \frac{\Delta^{2k-1}}{(2k-1)!}$
$S_{21} = \sum_{k=1}^{\infty} s_{2k} \frac{\Delta^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$R_{21} = \sum_{k=1}^{\infty} s_{2k} \frac{\Delta^{2k}}{(2k)!}$
$S_{12} = \sum_{k=2}^{\infty} s_{3k} \frac{\Delta^{2k}}{(2k)!}$	$R_{12} = \sum_{k=2}^{\infty} s_{3k} \frac{\Delta^{2k-1}}{(2k-1)!}$
$S_{03} = \sum_{k=2}^{\infty} s_{4k} \frac{\Delta^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$R_{03} = \sum_{k=2}^{\infty} s_{4k} \frac{\Delta^{2k}}{(2k)!}$

on retrouve dans S et R les mêmes séries s_{1k} à s_{4k}

4-C-4 - Calcul de x_{n+1} et y_{n+1}

$$x_{n+1} = x_{n+1}(x_n, y_n)$$

Fonction calculée par l'intermédiaire des fonctions $x_{n+1}(x', y')$ $x'(x_n, y_n)$ et $y'(x_n, y_n)$. Les fonction $x_{n+1}(x', y')$ et $x' = x'(x_n, y_n)$ ont les mêmes formes, sauf que les signes sont inversés pour les coefficients des termes ou degré > 1

Donc :

$$x_{n+1} = x'.\cos\Delta + y'.\sin\Delta - S_{30}x'^3 - S_{21}x'^2y' - S_{12}x'y'^2 - S_{03}y'^3$$

Calculons séparément les termes du second membre :

1° $x'\cos\Delta = x_n\cos^2\Delta + y_n\cos\Delta\sin\Delta + S_{30}\cos\Delta x_n^3 + S_{21}\cos\Delta x_n^2 y_n$
$+ S_{12}x_n y_n^2\cos\Delta + S_{03}y_n^3\cos\Delta$

$$2^\circ \quad y' \sin\Delta = -x_n \sin^2\Delta + y_n \sin\Delta\cos\Delta + R_{30} x_n^3 \sin\Delta + R_{21} x_n^2 y_n \sin\Delta + R_{12} x_n y_n^2 \sin\Delta + R_{03} y_n^3 \sin\Delta$$

$$3^\circ \quad -S_{30}x^3 = -S_{30}x_n^3\cos^3\Delta - 3S_{30}x_n^2 y_n \sin\Delta\cos^2\Delta - 3S_{30}x_n y_n^2 \sin^2\Delta\cos\Delta - S_{30}y_n^3\sin^3\Delta + \ldots$$

$$4^\circ \quad -S_{21}x'^2y' = S_{21}x_n^3 \sin\Delta\cos^2\Delta + S_{21}x_n y_n^2 \sin\Delta(1-3\cos^2\Delta) + S_{21}x_n^2 y_n \cos\Delta(3\sin^2\Delta - 1) - S_{21}y_n^3\sin^2\Delta\cos\Delta + \ldots$$

$$5^\circ \quad -S_{12}x'y'^2 = -S_{12}x_n^3\sin^2\Delta\cos\Delta - S_{12}x_n y_n^2\cos\Delta(1-3\sin^2\Delta) - S_{12}x_n^2 y_n \sin\Delta(1-3\cos^2\Delta) - S_{12}y_n^3\sin\Delta\cos^2\Delta + \ldots$$

$$6^\circ \quad -S_{03}y'^3 = S_{03}x_n^3\sin^3\Delta - 3S_{03}x_n^2 y_n \sin^2\Delta\cos\Delta + 3S_{03}x_n y_n^2 \sin\Delta\cos^2\Delta - S_{03}y_n^3\cos^3\Delta + \ldots$$

en ne prenant que les termes de degré ≤ 3

En remplaçant ces valeurs dans le second membre de x_{n+1} :

$$x_{n+1} = x_n\cdot\cos 2\Delta + y_n\cdot\sin 2\Delta + x_n^3\left[(S_{30}-S_{12})\sin^2\Delta\cos\Delta + R_{30}\sin\Delta + S_{21}\sin\Delta\cos^2\Delta + S_{03}\sin^3\Delta\right] + x_n^2 y_n\left[(R_{21}-S_{12})\sin\Delta + 3(S_{12}-S_{30})\sin\Delta\cdot\cos^2\Delta + 3(S_{21}-S_{03})\sin^2\Delta\cos\Delta\right]$$

$$+ x_n y_n^2 \left[(R_{12} + S_{21}) \sin\Delta + 3 (S_{12} - S_{30}) \sin^2\Delta \cos\Delta + \right.$$
$$\left. + 3 (S_{03} - S_{21}) \sin\Delta \cos^2\Delta \right]$$
$$+ y_n^3 \left[(S_{03} - S_{21}) \sin^2\Delta \cos\Delta + R_{03} \sin\Delta - S_{30} \sin^3\Delta - \right.$$
$$\left. - S_{12} \sin\Delta \cos^2\Delta \right]$$
$$+ \cdots$$

$$\underline{y_{n+1} = y_{n+1}(x_n, y_n)}$$

Les fonctions $y_{n+1}(x', y')$ et $y'(x_n, y_n)$ sont identiques sauf l'inversion des signes des termes de degré >1. Le calcul est similaire à celui de et nous obtenons :

$$y_{n+1} = -x' \sin\Delta + y' \cos\Delta - R_{30} x'^3 - R_{21} x'^2 y' - R_{12} x' y'^2 - R_{03} y'^3$$

$$y_{n+1} = -x_n \sin 2\Delta + y_n \cos 2\Delta$$
$$+ x_n^3 \left[-S_{30} \sin\Delta + (R_{30} - R_{12}) \sin^2\Delta \cos\Delta + R_{21} \sin\Delta \cos^2\Delta + R_{03} \sin^3\Delta \right]$$
$$+ x_n^2 y_n \left[3 (R_{12} - R_{30}) \sin\Delta \cos^2\Delta + 3 (R_{21} - R_{03}) \sin^2\Delta \cos\Delta - \right.$$
$$\left. - (R_{12} + S_{21}) \sin\Delta \right]$$
$$+ x_n y_n^2 \left[3 (R_{03} - R_{21}) \sin\Delta \cos^2\Delta + 3 (R_{12} - R_{30}) \sin^2\Delta \cos\Delta - \right.$$
$$\left. - (S_{12} - R_{21}) \sin\Delta \right]$$
$$+ y_n^3 \left[-S_{03} \sin\Delta + (R_{03} - R_{21}) \sin^2\Delta \cos\Delta - R_{12} \sin\Delta \cos^2\Delta - \right.$$
$$\left. - R_{30} \sin^3\Delta \right]$$
$$+ \cdots$$

4-C-5 - Calcul des coefficients β et δ

Les termes du 3ème degré de x_{n+1} et y_{n+1} sont :

(x_{n+1}) : $\quad R_3(x,y) = D x^3 + E x^2 y + F x y^2 + G y^3$

(y_{n+1}) : $\quad S_3(x,y) = D' x^3 + E' x^2 y + F' x y^2 + G' y^3$

Le coefficient β est : [27]

$$\beta = \delta^{-1}\left[(3D + E' + F + 3G') + j(3D' - E - F' - 3G)\right]$$

$$\begin{aligned}
\beta = {} & (3S_{30} - 3S_{12})\sin^2\Delta\cos\Delta + 3R_{30}\sin\Delta + 3S_{21}\sin\Delta\cos^2\Delta + 3S_{03}\sin^3\Delta \\
& + (3R_{21} - 3R_{03}) \;" - (R_{12} + S_{21}) \;" + (3R_{12} - 3R_{30}) \;" \\
& + (3S_{12} - 3S_{30}) \;" + (R_{12} + S_{21}) \;" + (3S_{03} - 3S_{21}) \;" \\
& + (3R_{03} - 3R_{21}) \;" - 3S_{03} \;" - 3R_{12} \;" - 3R_{30} \;" \\
& + j\big[3(R_{30} - R_{12}) \;" - 3S_{30} \;" + 3R_{21} \;" + 3R_{30} \;" \\
& + 3(S_{03} - S_{21}) \;" + (S_{12} - R_{21}) \;" + 3(S_{30} - S_{12}) \;" \\
& + 3(R_{12} - R_{30}) \;" - (S_{12} - R_{21}) \;" + 3(R_{03} - R_{21}) \;" \\
& + 3(S_{21} - S_{03}) \;" - 3R_{03} \;" + 3S_{12} \;" + 3S_{30} \\
= {} & 3(S_{03} - R_{30})(\sin^3\Delta + \sin\Delta\cos^2\Delta - \sin\Delta) + j\big[3(R_{30} + S_{03})(\sin^3\Delta + \\
& + \sin\Delta\cos^2\Delta - \sin\Delta)\big]
\end{aligned}$$

β : $\sin^3\Delta + \sin\Delta\cos^2\Delta - \sin\Delta = \sin\Delta\left[\sin^2\Delta + \cos^2\Delta - 1\right] = 0$

Donc : $\underline{\beta = 0}$

Le coefficient δ est :

$$\delta = \delta^{-1}\left[(D - E' - F + G') + j(D' + E - F' - G)\right]$$

$$\begin{aligned}
\delta = {} & \tfrac{1}{2}\left[(S_{12} + R_{21}) - (S_{30} + R_{03})\right]\sin\Delta\cos^2\Delta + \tfrac{1}{2}\left[R_{30} - S_{03} + S_{21} - R_{12}\right]\sin^2\Delta\cos\Delta \\
& + \tfrac{1}{2}\left[(S_{21} - R_{12}) + (R_{30} - S_{03})\right]\sin\Delta\cos^2\Delta + \tfrac{1}{2}\left[R_{03} + S_{30} - R_{21} - S_{12}\right]\sin^2\Delta\cos\Delta
\end{aligned}$$

(expression irréductible)

Donc : $\underline{\delta \neq 0}$

CONCLUSION

Dans le premier chapitre de notre mémoire, nous avons montré comment étendre la méthode de détermination de la frontière (F) d'influence des points singuliers à la recherche systématique multi-extrémale. Nous avons mis l'accent sur les qualités intrinsèques de toute méthode systématique de recherche extrémale, à savoir

- quitter rapidement un extrémum trouvé
- suivre un chemin de recherche attractif
- prospecter tous les extréma d'une façon exhaustive

et nous avons immergé notre deuxième problème dans le formalisme du premier. Deux fonctions différentes ont été testées avec succès, et ce, avec et sans contrainte, le nombre d'extréma se situe entre 6 à 8 dans les différents cas. Ayant vérifié le bien fondé du principe de la méthode, on peut envisager les extensions de recherche de deux façons : tester des fonctions particulièrement difficiles (vallées, cas dégénérés) et étudier la méthode pour les fonctions de dimensions $s > 2$. La première extension n'a de vrais intérêts que si les fonctions testées représentent des cas pratiques. Tandis que la deuxième extension nécessite des études préalables fondamentales des récurrences d'ordre m 2. La méthode elle-même, en effet, étant basée sur la nature des points singuliers (cols, noeuds, etc...) il est évidemment indispensable de connaître ces derniers dans le cas des récurrences d'ordre $m > 2$. Ces études formeront en soi un travail important, il suffit de penser que, rien que pour $m = 3$, on a plusieurs types de cols.

Continuant les études amorcées dans [26 à 28] , nous avons entrepris dans le deuxième chapitre l'analyse de la stabilité d'un point double d'une récurrence d'ordre $m > 2$, en présence d'un cas critique, avec deux multiplicateurs complexes conjugués de module unité, les autres ayant un module inférieur à un. Nous avons réussi à montrer que cette analyse peut être ramenée à celle d'une récurrence d'ordre 2. Il suffit alors de calculer le signe d'une expression G_1 dépendant des coefficients des termes non linéaires de cette dernière, pour conclure à la stabilité ou à l'instabilité. Un tel résultat est obtenu à la suite d'un double travail : transformer le cas général en un cas particulier et trouver une fonction de Ljapunov adéquate. Malgré l'inspiration que l'on peut obtenir des travaux de Malkin [37] effectués dans le domaine continu, il n'y a pas de règles générales pour trouver une fonction de Ljapunov adéquate. Un grand nombre de tâtonnements ont été indispensables (expérimentations mathématiques ?) pour que V et ΔV possèdent des propriétés désirées. Un petit exemple d'application (une récurrence du 3ème ordre) a montré la grande commodité d'utilisation de la méthode.

Notre attention se retourne de nouveau vers les applications dans le troisième chapitre où nous analysons deux types de systèmes :

- systèmes décrits par la forme canonique de Lur'e dans sa version discrète
- systèmes asservis échantillonnés avec un bloqueur d'ordre 1.

Concernant les premiers nous avons utilisé les résultats du deuxième chapitre pour analyser le cas critique avec deux multiplicateurs complexes conjgués de module unité. Nous sommes arrivés à des expressions de G_1 relativement simples à manipuler. Concernant les seconds, nous avons utilisé les résultats du chapitre 2. et sommes arrivés à tracer des réseaux paramètriques des zones de stabilité et d'instabilité.

Dans le quatrième et dernier chapitre, nous avons touché un tout nouvel horizon sur les possibilités offertes par les récurrences. Nous avons pu trouver une solution échantillonnée mais exacte de l'équation différentielle non linéaire à coefficient périodique,

$$x'' + k_1.x + k_2.f(\omega t).x^3 = 0$$

Il ne s'agit plus de l'optimisation, ni seulement de la stabilité, mais du comportement fondamental de la solution. On connaissait ce type de solution, dite "solution dépendant des conditions initiales". Peu d'auteurs cependant sont allés loin pour dénombrer les zones distinctes de conditions initiales, le comportement des sous solutions, les combinaisons séquentielles des solutions, propriétés particulières de résonnance, etc...Sans doute à cause des calculs analytiques onéreux, et surtout, à cause du manque de connaissance sur les récurrences dont l'association est indispensable pour aboutir à une conclusion. Les résultats que nous avons obtenus, sous forme de sous solutions à nombre fini, à combinaisons séquentielles prédéterminables, du moins par expérimentations mathématiques, permettent d'explorer tous les aspects du comportement fondamental de l'équation étudiée. Jusqu'à présent, ce type d'équations est étudié par des méthodes approximatives, les termes délaissés des approximations introduisant ainsi un amortissement artificiel. Or, l'équation elle-même, sans le terme en x', est conservative. Il s'introduit ainsi un doute sur le comportement à terme de la solution. Les expressions exactes que nous avons obtenues permettent de lever ce doute. L'ouverture procurée par cette étude vers d'autres recherches est immédiatement palpable. D'une part, les propriétés des solutions de l'équation étudiée sont loin d'être épuisées. D'autre part, une certaine méthodologie est établie ici pour étudier des équations similaires, par exemplaire avec un terme non linéaire x^m, $m > 3$, ou alors avec d'autres formes de coefficients périodiques par exemple $\sin \omega t$.

Les sujets traités dans ce mémoire, apparemment divers, n'ont pas seulement comme unité les récurrences et l'automatique. Ils caractérisent en plus, d'une façons plus marquée, l'expansion évolutive des études de l'équipe mécanique non linéaire. Expansion vers les récurrences d'ordre supérieur, ayant acquis des bases solides sur les récurrences du deuxième ordre. Expansion vers la programmation mathématique et les comportements fondamentaux des équations difficiles, sans quitter le fertile champ de stabilité où de nombreux résultats originaux ont déjà été acquis.

Ainsi évolue la connaissance.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. POINCARE
Oeuvres de Henri Poincaré
Tome 1, Gauthier-Villars, 1951.

[2] A. ANDRONOV - A. VITT - S. KHAIKIN
Theory of oscillators.
Pergamon Press, 1966

[3] A. ANDRONOV - Ye LEONTOVITCH - GORDON - A. MAYER
Théorie qualitative des systèmes dynamiques du 2ème ordre (en russe)
Editions Scientifiques, 1966.

[4] A. ANDRONOV - Ye LEONTOVITCH - GORDON - A. MAYER
Théorie des bifurcations des systèmes dynamiques dans le plan
(en russe) Edition Hayka, 1967

[5] S. LATTES
Annali di Matematica, série 3, Tome 13, 1906.

[6] J. HADAMARD
Bull. Soc. Math. Fr. , 1901, Comptes Rendus des Séances

[7] C. MIRA
C.R.A.S. Paris, t. 256, groupe 1, 1963, p. 3809

[8] A.R. CIGALA
Annali di Matematica, série 3, t. 11, 1905

[9] P. MONTEL
Leçons sur les récurrences et leurs applications
Gauthier-Villars, 1957.

[10] C. MIRA
Méthode de détermination du domaine de stabilité asymptotique d'un point double d'une récurrence non linéaire. Congrès d'Automatique Théorique, Paris 4-7 Mai 1965.

[11] I. GUMOWSKI - C. MIRA
C.R. Acad, Sc., Paris, t. 260, groupe 2, 1965, p. 6524

[12] C. MIRA
C.R.A.S., Paris, t. 261, groupe 2, 1965, p. 5314

[13] C. MIRA
Etude de la frontière de stabilité d'un point double stable d'une récurrence non linéaire autonome du deuxième ordre.
International Pulse Symposium, IFAC, Budapest, 9-11 Avril 1965.

[14] J.L. ABATUT - J.P. BABARY
C.R.A.S., Paris, t. 263, 1966, p. 931, série A.

[15] J.P. BABARY
C.R.A.S., Paris, t. 265, 1967, p. 485, série A.

[16] J.P. BABARY - C. MIRA
C.R.A.S., Paris, t. 268, p. 129, 1969, série A.

[17] C. MIRA
C.R.A.S., Paris, t. 268, p. 621, 1969, série A.

[18] C. MIRA
C.R.A.S., Paris, t. 269, p. 1006, 1969

[19] C. MIRA
C.R.A.S., Paris, t. 270, p. 332, 1970,

[20] C. MIRA
C.R.A.S., Paris, t. 270, p. 466, 1970

[21] C. MIRA - F. ROUBELLAT
C.R.A.S., Paris, t. 266, série A, 1968

[22] J. BERNUSSOU
C.R.A.S., Paris, t. 269, série A, 1969

[23] C. BURGAT - C. MIRA
C.R.A.S. PARIS, t. 269, série A, 1970

[24] C. MIRA - L. PUN
C.R.A.S., Paris, t. 272, p. 505-508, 1971

[25] A. GIRAUD
Applications des récurrences à l'étude de certains systèmes de commande.
Thèse de Docteur Ingénieur, Toulouse, Avril 1969

[26] F. ROUBELLAT
Contribution à l'étude des solutions des récurrences non linéaires et applications aux systèmes à données échantillonnées.
Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Toulouse, Septembre 1969.

[27] J. P. BABARY
Contribution à l'étude des solutions des récurrences non linéaires et différentes applications.
Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Toulouse, Septembre 1969.

[28] J. L. ABATUT
Contribution à l'analyse de systèmes à données échantillonnées à l'aide des récurrences associées.
Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Toulouse, Mai 1970.

[29] J. BERNUSSOU
Contribution à l'étude des systèmes commandés par impulsions modulées en fréquence.
Thèse de Docteur Ingénieur, Toulouse, Juillet 1970.

[30] C. BURGAT
Contribution à l'étude de la stabilité des systèmes linéaires à structure périodique.
Thèse de Docteur Ingénieur, Toulouse, Octobre 1970.

[31] L. PUN
Recherche systématique des extrema d'une fonction à deux variables.
Congresso di Automatica, Avril 1970, Madrid.

[32] LJAPUNOV
Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2è s, t. IX.

[33] L. PUN
Introduction to optimization Practice.
John Wiley, 1969.

[34] L. PUN
Optimization : formulatique, programmation mathématique et informatique
Nouvelles Techniques, n° A4, 1970, 146-161.

[35] D. GIGON
Optimisation paramétrique des systèmes de commande à données numériques.
Thèse de Doctorat d'Université, Toulouse, 1967.

[36] T. H. KELLY - T. L. SPEYER
Accelerated gradient projection.
IOTA, October 1969.

[37] I. MALKIN
Théorie de la stabilité du mouvement (en russe).
Fizmatgiz : Moscou, 1966.

[38] W. HAHN
Math. Annalen 136, 1958, 430-441.

[39] P. FISCHER
C.R.A.S. Paris, t. 270, 1970, série A, pp. 235-238.

[40] C. MIRA
Cours de systèmes asservis non linéaires.
Maîtrise EEA, C3 Automatique, Dunod, 1969.

[41] Y. SEVELY
Systèmes et asservissements linéaires échantillonnés.
Maîtrise EEA, C3 Automatique, Dunod, 1969.

[42] P. VIDAL
Systèmes asservis échantillonnés non linéaires, Dunod, 1968.

[43] E.I. JURY
A simplified stability criterium for linear discrete systems.
Proceeding of IRE, June 1962, 1493-1500.

[44] P.A. SAMULSON
Conditions that the roots of a polynomial less than unity in absolute value.
J. of Mathematical Statics, v. 12, sept. 1951

[45] E. KAMKE
Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Losungen 1.
Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959.

[46] W.J. CUNNINGHAM
Nonlinear analysis
Mc Graw Hill, 1958.

[47] J.C. GILLE - P. DECAULNE - M. PELEGRIN
Méthodes modernes d'étude des systèmes asservis
Dunod, 1960.

[48] A.M. LETOV
Stability in nonlinear control systems, traduit du russe par J.G. Adashko
Princeton, 1961.

[49] A. BLAQUIERE
Nonlinear system analysis,
Academic Press, 1966.

[50] E.G. KELLER
Mathematics of modern engineering, volume II
Dover, 1961.

[51] H.T. DAVIS
Introduction to nonlinear differential and integral equations.
Dover, 1962.

[52] APPEL & LACOUR
Fonctions elliptiques et applications.
Gauthier Villars et Fils, 1897.

[53] R. DE MONTESSUS DE BALLORE
Leçons sur les fonctions elliptiques en vue de leurs applications.
Gauthier Villars et Fils, 1917.

[54] H. HANCOCK
Elliptic integrals.
Dover 1958.

[55] HANCOCK H.
Lectures on the theory of elliptic functions.
Dover 1958

[56] a BULIRSCH R.
Numerical calculation of elliptic integrals and elliptic functions
Numerische Mathematik 7, 78-90, 1965.

[56] b R. VALETTE
Etude du comportement à fort signal de systèmes de commande comprenant un redresseur polyphasé.
Thèse de Docteur Ingénieur, Toulouse, Juin 1971.

[57] A.A. ANDRONOV - L.S. PONTRYAGIN
Systèmes grossiers
Doklady Akad. Nauk. vol. 14, 1937, p. 247 et
Oeuvres complètes d'Andronov, Edition de l'Acad. Sc. d'URSS, 1956, p. 181.

[58] I. GUMOWSKI - C. MIRA -
L'optimisation , la théorie et ses problèmes.
Dunod 1970.

[59] W. HAHN
Math. Annalen 136, 1958, 430-441.

[60] P. FISCHER
C.R.A.S., t. 270, Série A, pp. 235-238, 1970.

[61] A.R. CIGALA
Annali di Matematica, 3ème série, 13, 1906.

[62] Y. SEVELY
Asservissements échantillonnés linéaires.
Cours ENSEEIHT, Edition 1968.

[63] E.I. JURY
Sampled date control systems.
John Wiley , 1958

[64] PEARSON - GIBSON
On the asymptotic stability of a class of saturating sampled data systems.
IEEE Transactions of Applications and Industry, March 1964, v. 84, 1
pp. 81-87.

[65] RAKIMOV G.G.
Analogue de la méthode de Lur'e pour l'analyse de la stabilité d'un système non linéaire à données échantillonnées.
Izvstia Akad Nauk, SSSR, 1964, n° 2

[66] MOSER
Nach Akad Wiro Gottlingen II A, n° 6, 8, 7, 1951.

[67] COLE F.T.
Nonlinear transformations in Action angle variable.
Note Technique, National Accelerator Laboratory, TM-179, 13 Juin 1969.

Autorisation de soutenance
accordée.
TOULOUSE, le - 7 JUIN 1971

P/Le Président :
Le Vice-Président,

F. MATHIS